

**Forschungsgesellschaft für Straßen- und Verkehrswesen**

Arbeitsgruppe Sonderaufgaben

Arbeitsausschuß Statistische Auswertung von Prüfergebnissen

# **FGSV - ARBEITSPAPIER**

## **Nr. 32**

**Betrachtungen zu  
Bindemittelmengengleitklauseln  
aus der Sicht  
der Technischen Statistik**

Ausgabe 1994

Forschungsgesellschaft für Straßen- und Verkehrswesen e.V.

## Arbeitsausschuß "Statistische Auswertung von Prüfergebnissen"

Leiter: Dr.-Ing. U r b a n, Hamburg

Mitarbeiter: Dipl.-Math. Dr.rer.nat. D e u t l e r, Mannheim  
Dr.-Ing. H a a s, Rösrath  
Dr.-Ing. K u d l a, Wasserburg  
Dr.-Ing. L o o s, Trebur  
Prof. Dr.-Ing. M a n n s, Stuttgart  
Dipl.-Ing. R o d e, Köln

Die in Form von Arbeitspapieren herausgegebenen Arbeitsergebnisse von Gremien der FGSV stellen Zwischenergebnisse weitergehender Arbeiten oder kurzfristig erarbeitete Beiträge zur weiteren Diskussion aktueller Fragen dar.

Diese Arbeitspapiere sind nicht innerhalb der FGSV abgestimmt und deshalb noch nicht als Stellungnahme der FGSV zu betrachten.

Inhalt	Seite
1. Zusammenfassung	1
2. Einführung und Problemstellung	2
3. Streuungsverhalten des Prüfmerkmals Bindemittelgehalt	3
4. Diskussion der Bindemittelmengengleitklausel	11
5. Zufallsstrebereiche für gemessene Bindemittelgehalte	19
6. Literatur	28
7. Anhang	29

## 1. Zusammenfassung

Um Angebote für Asphaltarbeiten im Straßenbau vergleichbar zu machen, legen manche Auftraggeber sogenannte "Kalkulationsbindemittelgehalte" für die einzelnen Mischgutsorten fest, die der Preisbildung zugrunde zu legen sind.

Der für die jeweilige Mischgutsorte technisch richtige Bindemittelgehalt ist dann durch eine Eignungsprüfung zu ermitteln und dem Auftraggeber vom Auftragnehmer anzugeben. Er ist dann die Bezugsgröße für die Abnahme der Bauleistung.

Für die Abrechnung wird der Bindemittelgehalt, der bei der Kontrollprüfung ermittelt wird, zugrunde gelegt, wobei jeder Einzelwert für die ihm zugeordnete Fläche in Ansatz gebracht wird.

Dabei wird fälschlicherweise angenommen, daß der bei der Kontrollprüfung gefundene Wert des Bindemittelgehaltes dem tatsächlichen (wahren) Wert entspricht.

Die in dem betreffenden Regelwerk (ZTV bit, ZTVT) vorgesehenen Toleranzen für die unvermeidlichen Abweichungen (Streuungseinflüsse) infolge Herstellung, Transport, Probenahme, ggf. Einbau des Asphaltmischgutes sowie die aus der Prüfung bleiben bei dieser Vorgehensweise unberücksichtigt. Überlagert und verschärft wird dies durch eine weitere ungerechtfertigte Regelung: Überschreitungen des Sollwertes (Kalkulationsbindemittelgehaltes) werden nur bis zum Wert "+0,1 Gew.-%", Unterschreitungen jedoch in voller Höhe in Ansatz gebracht und bei der Korrektur des Einheitspreises berücksichtigt.

Diese nicht akzeptable Vorgehensweise ist dem Arbeitsausschuß "Statistische Auswertung von Prüfergebnissen" der "Forschungsgesellschaft für das Straßen- und Verkehrswesen" als dem fachlich zuständigen Gremium zur Stellungnahme zugeleitet worden. Die dort erfolgte Überprüfung nach den Grundsätzen der mathematischen Statistik, deren Ergebnis nachfolgend im einzelnen vorgetragen und begründet wird, führt zu der Bewertung, daß der Auftragnehmer/Mischgutproduzent einseitig benachteiligt wird.

Selbst in dem nur theoretisch denkbaren Fall, daß alle im Einflußbereich des Auftragnehmers auftretenden Streuungseinflüsse aus Herstellung, Transport, Probenahme und ggf. Einbau des Asphaltmischgutes ausgeschaltet werden könnten, würde allein die Prüfstreuung, die aus der im Zuständigkeitsbereich des Auftraggebers liegenden Kontrollprüfung resultiert, zu einer Benachteiligung des Auftragnehmers/Mischgutherstellers mit Kostenfolgen führen, wie die hiermit vorgelegte Stellungnahme eindrucksvoll beweist.

Es besteht somit kein Anlaß, die in dem geltenden Technischen Regelwerk (ZTV bit, ZTVT) festgelegten, als bewährt geltenden Regelungen für die Abrechnung - hier des Bindemittelgehaltes - zu verändern.

## 2. Einführung und Problemstellung

Der Bitumengehalt von Asphaltmischgut ist ein maßgebliches und für die Qualität wichtiges Kriterium. Zusätzlich ist er wegen des im Vergleich zu den anderen Komponenten hohen Preises von großer wirtschaftlicher Bedeutung. So wurden Stoffpreisgleitklauseln eingeführt, um dem Auftragnehmer bei langfristigen Aufträgen das Risiko für starke Preisänderungen, insbesondere für Bitumen und Energie zu nehmen.

Im Zusammenhang mit Stoffpreisgleitklauseln gemäß ZVB-STB 88 wurden in einigen Bundesländern sogenannte Kalkulationsbindemittelgehalte und Bindemittelmengengleitklauseln eingeführt. Diese Regelungen sind in den einzelnen Bundesländern unterschiedlich.

Die Kalkulationsbindemittelgehalte wurden eingeführt, um den Anbietern von Mischgut gleiche Ausgangsbedingungen bezüglich der Bindemittelgehalte vorzugeben. Damit sollen nicht nur Wettbewerbsverzerrungen infolge unterschiedlicher Kalkulationsgrundlagen vermieden, sondern auch verhindert werden, daß in den Eignungsprüfungen zu niedrige und technisch nicht mehr sinnvolle Bindemittelgehalte angestrebt werden.

Zum Teil wurden zusätzliche Abrechnungsbindemittelgehalte eingeführt, vgl. z.B. /1/; damit erfolgt die Abrechnung von Mischgutlieferungen aufgrund der gefundenen Ist-Bindemittelgehalte aus den Kontrollprüfungen. Ziel ist dabei, dem Auftragnehmer nur die Bindemittelmengen zu bezahlen, die im Mischgut enthalten sind.

Mit diesen Regelungen wurden eine Qualitätsverbesserung und eine Risikominimierung für die Vertragspartner angestrebt. Diskussionen der letzten Zeit haben Zweifel an ihrer Zweckmäßigkeit geweckt.

Da diese Fragestellungen hauptsächlich statistische Gesichtspunkte beinhalten, wurde der Arbeitsausschuß 9.10 "Statistische Auswertung von Prüfergebnissen" der Forschungsgesellschaft für das Straßen- und Verkehrswesen (FGSV) vom Deutschen Asphaltverband (DAV) gebeten, zu den bereichsweise eingeführten Regelungen eine Stellungnahme abzugeben. Diese Stellungnahme wurde von Dr. T. Deutler, Seminar für Statistik der Universität Mannheim, verfaßt, und im Arbeitsausschuß 9.10 beraten und verabschiedet.

### 3. Streuverhalten des Prüfmerkmals Bindemittelgehalt

Gemäß ZTVT /2/ und ZTV bit /3/ sind die Anforderungen an den Bindemittelgehalt in Form einer Sollwertforderung formuliert:

**ZTV bit:** "Der Bindemittelgehalt jeder aus dem Mischgut oder ausnahmsweise aus der Decke zu entnehmenden Probe (Durchschnittsprobe nach DIN 1996) darf von dem angegebenen Wert (Sollwert) bei Mischgut nach den Abschnitten 2 bis 5, 7 und 8 höchstens um  $\pm 0,5$  Gew.-%, bei Asphaltmastix nach Abschnitt 6 höchstens um  $\pm 1,0$  Gew.-% abweichen."

**ZTVT:** "Der Bindemittelgehalt jeder aus dem Mischgut oder ausnahmsweise aus der Asphalttragschicht zu entnehmenden Probe (Durchschnittsprobe nach DIN 1996, Teil 2) darf von dem aufgrund der Ergebnisse der Eignungsprüfung angegebenen Wert höchstens um  $\pm 0,6$  Gew.-% abweichen."

Der Sollwert für die verwendete Mischgutsorte ist also durch die Eignungsprüfung bestimmt. Dieser Sollwert wird dem Bauvertrag zwischen Auftraggeber und Auftragnehmer zugrunde gelegt. (Zur Definition des Sollwertes vergleiche DIN 55 350, Teil 12 /4/: "Wert eines quantitativen Merkmals, von dem die Istwerte dieses Merkmals so wenig wie möglich abweichen sollen")

Eine Sollwertforderung an den Bindemittelgehalt bedeutet insbesondere, daß der mittlere Bindemittelgehalt eines vorgelegten Prüfloses (möglichst) mit dem Sollwert übereinstimmen soll. Dabei ist es aber - wie aus der DIN-Definition abzulesen ist - durchaus zulässig, daß einzelne gemessene Bindemittelgehalte vom Sollwert abweichen und zwar maximal bis zu der von ZTVT bzw. ZTV bit eingeräumten Toleranz. Dabei wird also die Erfahrung berücksichtigt, daß es technisch unmöglich ist, exakt einen vorgegebenen Bindemittelgehalt für jedes Volumenelement eines Prüfloses einzuhalten, weil die tatsächlichen Bindemittelgehalte infolge technisch unkontrollierbarer Störgrößen zufällig streuen. Gemessene Bindemittelgehalte sind außer den anlagebedingten Streuungen zusätzlich noch mit prüfbedingten Streuungen behaftet.

Als Maß für die Streuung verwendet man in der Statistik üblicherweise die sogenannte Standardabweichung  $\sigma$  oder deren Quadrat, die sogenannte Varianz  $\sigma^2$ . Je stärker (bzw. geringer) die tatsächlichen (oder gemessenen) Merkmalwerte streuen, umso größer (bzw. kleiner) ist  $\sigma$ . Genau dann, wenn alle tatsächlichen (oder gemessenen) Prüfmerkmalwerte den gleichen Zahlenwert besitzen, wenn diese Werte also nicht streuen, ist  $\sigma=0$ .

Die bei der Kontrollprüfung beobachtete Streuung der Bindemittelgehalte im Prüflos wird verursacht durch unkontrollierbare, unbeobachtbare und damit zufällige Störeinflüsse, die bei jedem Arbeitsgang während der Herstellung und Verarbeitung von Mischgut wirken, im einzelnen bei

- Herstellung (abgekürzt mit H)
- Transport ( T )
- Einbau ( E )
- Probenahme und Prüfung ( R )

Demzufolge stellt das Prüfmerkmal "Bindemittelgehalt" eine sogenannte "Zufallsgröße" dar. Deren Gesamtvarianz  $\sigma^2_{Ges}$  setzt sich - aufgrund statistischer Gesetzmäßigkeiten - additiv zusammen aus den Varianzen für die einzelnen Arbeitsgänge, nämlich aus  $\sigma^2_H$ ,  $\sigma^2_T$ ,  $\sigma^2_E$  und  $\sigma^2_R$ , d.h. es gilt:

$$(2.1) \quad \sigma^2_{Ges} = \sigma^2_H + \sigma^2_T + \sigma^2_E + \sigma^2_R \quad .$$

Diese Gleichung läßt sich anhand einer sukzessiven Anwendung des Satzes von Pythagoras geometrisch veranschaulichen; vgl. die Prinzipskizze in Bild 2.1. Dabei hat man die Seitenlängen der entsprechenden rechtwinkligen Dreiecke als Standardabweichungen zu interpretieren.

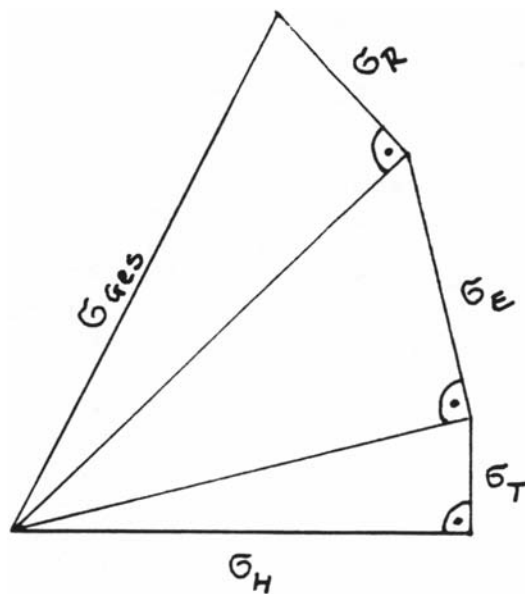


Bild 2.1: Überlagerung der Streuungen aus Herstellung (H), Transport (T), Einbau (E) und Prüfung (R) zur Gesamtstreuung (Ges)

Aufgrund von Erfahrungen sowie zahlreichen und umfangreichen Ringuntersuchungen kann man für  $\sigma_R$  und  $\sigma_{Ges}$  von folgenden Richtwerten bzw. Größenordnungen ausgehen:

$$(2.2) \quad \sigma_R \approx 0,15 \text{ (vgl. DIN 1996, Teil 6 /5/)}$$

$$(2.3) \quad 0,3 \leq \sigma_{Ges} \leq 0,5 \text{ (vgl. Urban /6/)}$$

Gemäß /1/ wird der Abrechnungseinheitspreis für ein Prüflös aus den in der Kontrollprüfung ermittelten Bindemittelgehaltswerten berechnet. Demzufolge ist dann auch der Abrechnungseinheitspreis keine konstante Größe, sondern - wie auch das Qualitätsmerkmal Bindemittelgehalt selbst - eine mit Streuung behaftete Zufallsgröße. Um deren zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung und deren Streuung analysieren zu können, müssen zunächst die Verteilungseigenschaften von gemessenen Bindemittelgehalten untersucht werden. Dazu hat man anhand eines mathematisch-statistischen Modells zuerst die erforderlichen Modellannahmen darzulegen und zu erörtern. Um den Kern der Abrechnungsproblematik

für Bindemittelmengen-Gleitklauseln Schritt für Schritt gut herauskristallisieren zu können, soll zu Beginn nicht gleich der komplexeste Realfall, sondern ein möglichst einfach gelagerter Idealfall betrachtet werden.

Die Modellannahmen dieses Idealfalles werden nun der Reihe nach aufgelistet und jeweils mit erläuternden Kommentaren versehen. Die Annahmen (1) bis (3) beziehen sich auf Eigenschaften des Prüfloses und des Prüfmerkmals "Bindemittelgehalt" im Prüflos; die Annahmen (4) bis (7) beinhalten die üblicherweise von jedem Prüfverfahren geforderten Eigenschaften übertragen auf die Bindemittelgehaltsbestimmung.

Annahme (1):

Es werde eine Prüflosfläche von 6000 m<sup>2</sup> betrachtet, so daß gemäß ZTVT oder ZTV bit bei der Kontrollprüfung genau eine Bindemittelgehaltsbestimmung nach DIN 1996 durchzuführen ist.

Annahme (2):

Der mittlere Bindemittelgehalt  $\mu_B$  im Prüflos stimmt exakt mit dem vorgegebenen Sollbindemittelgehalt  $B_{soll}$  überein. Es gilt also

$$(2.4) \quad \mu_B = B_{soll} .$$

Die in ZTVT und ZTV bit erhobene Sollwertanforderung an den Mittelwert soll also exakt erfüllt sein.

Annahme (3):

Die Gesamtstreuung stimmt mit der Prüfstreuung überein. Es gilt also

$$(2.5) \quad \sigma^2_{Ges} = \sigma^2_R .$$

Aufgrund von (2.1) ist Annahme (3) gleichbedeutend mit

$$(2.6) \quad \sigma^2_H = 0 \text{ und } \sigma^2_T = 0 \text{ und } \sigma^2_E = 0 .$$

Die Streuungen aus Herstellung, Transport und Einbau werden hier also zur Vereinfachung zunächst idealisierend zu Null angenommen. Das bedeutet technisch, daß jedes Volumenelement im Mischgut oder in einer zu beurteilenden Prüflosschicht den gleichen tatsächlichen Bindemittelgehalt aufweist. Mit anderen Worten: Der tatsächliche Bindemittelgehalt besitzt überall einen konstanten Wert, er streut also nicht.

Die Streuung beobachteter Bindemittelgehaltswerte ist dann allein auf die unvermeidliche Prüfstreuung zurückzuführen. Die Annahmen (2) und (3) zusammengefaßt beschreiben den - nicht realisierbaren - Idealfall, daß der tatsächliche Bindemittelgehalt im Mischgut oder in einer Schicht (oder Lage) nicht nur homogen, d.h. konstant ist, sondern auch an jeder Stelle der Schicht (oder Lage) oder in jedem Volumenelement mit dem vorgegebenen Sollwert übereinstimmt. Mit anderen Worten: Die Sollwertanforderung an den Bindemittelgehalt im Prüflos wird nicht nur im Mittel, sondern sogar an jeder Stelle des Prüfloses eingehalten. Das bedeutet: Die im vorliegenden Planspiel beteiligten Firmen (Mischguthersteller, Transportunternehmen und Einbaufirma) haben bei Erstellung der

Schicht anforderungsgemäß und völlig fehlerfrei gearbeitet. Sie haben sozusagen ihr Soll sogar übererfüllt. Denn damit wird eine Qualität vorgelegt, die weitaus besser ist als es in ZTVT oder ZTV bit gefordert wird, eine Qualität, die sich aber auch nicht weiter verbessern läßt, die allerdings - realistisch betrachtet - nicht erreichbar ist.

Die Streuung der Kontrollprüfergebnisse, die wegen Annahme (3) allein vom Prüfverfahren "Bindemittelgehaltsbestimmung" herrührt, ist dann also nicht durch die Auftragnehmer verursacht; denn die Kontrollprüfung wird vom Auftraggeber selbst durchgeführt oder von ihm veranlaßt.

Annahme (4):

Der tatsächliche, zu messende Bindemittelgehalt  $B_w$  und der beobachtete Meßwert  $B$  einer Probe unterscheiden sich nur um die prüfbedingte Abweichung  $e$ . Es gilt also

$$(2.7) \quad B = B_w + e .$$

Hierbei ist  $e$  eine nicht beobachtbare zufällige Größe, verursacht durch eine Vielzahl von unkontrollierbaren Störgrößen, die während des Meßprozesses wirksam sind. Mit  $e$  ist dann auch  $B$  eine Zufallsgröße, die eine Verteilung mit zugehörigem Erwartungswert und zugehöriger Varianz besitzt.

Annahme (5):

Mit dem Prüfverfahren Bindemittelgehaltsbestimmung wird der tatsächliche Gehaltswert  $B_w$  im Mittel richtig bestimmt. Der Erwartungswert (=theoretischer Durchschnittswert) von  $B$  - symbolisch als  $\mu_B$  oder auch häufig in der Form  $E(B)$  geschrieben - stimmt also mit  $B_w$  überein. Es gilt also

$$(2.8) \quad \mu_B := E(B) = B_w .$$

Die Übereinstimmung von  $\mu_B$  und  $B_w$  bedeutet, daß die prüfbedingten Zufallsabweichungen  $e = B - B_w$  im Mittel verschwinden:

$$(2.9) \quad \mu_e := E(e) = 0 .$$

Mit anderen Worten: Die Abweichungen  $e$  gleichen sich im Mittel aus, vgl. auch Bild 2.2 (a). Die Zufallsabweichungen haben ihr "Zentrum" oder ihren "Schwerpunkt" im Nullpunkt; dementsprechend "konzentrieren" sich die gemessenen Bindemittelgehaltswerte beim tatsächlichen Wert  $B_w$  entsprechend Gleichung (2.8). Das Prüfverfahren weist also keine prüfbedingte systematische Abweichung auf, vgl. hierzu /7/,/8/.

(Bemerkung: Wäre das Prüfverfahren mit einer prüfbedingten systematischen Abweichung  $a$  behaftet, dann würde  $\mu_e = a \neq 0$  gelten. Die gemessenen Bindemittelgehalte würden sich also im Mittel vom tatsächlichen Wert  $B_w$  um die systematische Abweichung  $a$  unterscheiden. Das Zentrum der Verteilung der  $B$ -Werte würde dann nicht mit  $B_w$  übereinstimmen, sondern bei  $B_w + a$  liegen, vgl. Bild 2.2 (b).)



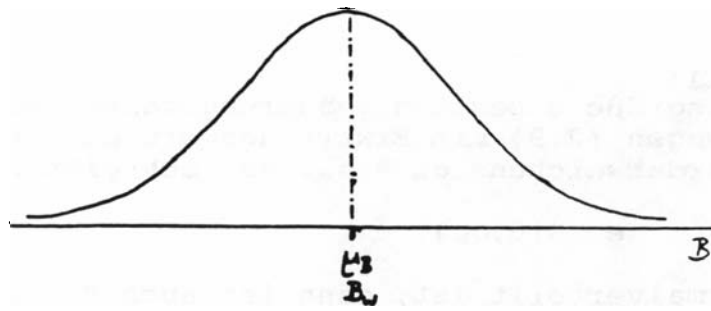


Bild 2.2 (a):

Prüfverfahren ohne prüfbedingte systematische Abweichung

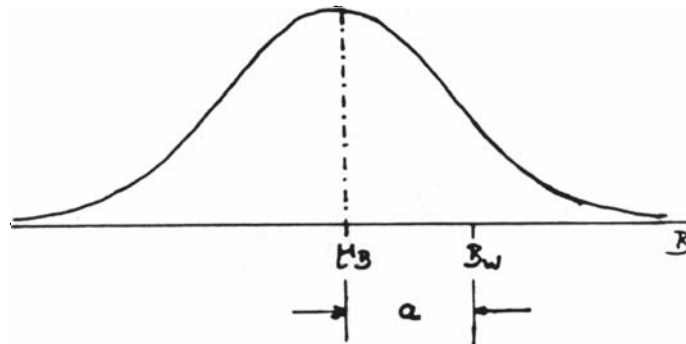


Bild 2.2 (b):

Prüfverfahren mit prüfbedingter systematischer Abweichung  $a$

Annahme (6):

Die Präzision des Prüfverfahrens "Bindemittelgehaltsbestimmung" wird durch die Standardabweichung  $\sigma_e$  der prüfbedingten Zufallsabweichungen quantifiziert.

Da Kontrollprüfungen unter Vergleichsbedingungen stattfinden, ist  $\sigma_e$  als Vergleichsstandardabweichung  $\sigma_R$  zu interpretieren. (Zur Definition der Vergleichsstandardabweichung vergleiche man /8/, /9/, /10/). Daher hat man

$$(2.10) \quad \sigma_e = \sigma_R .$$

Da die Streuung der gemessenen Bindemittelgehalte um den tatsächlichen Wert  $B_w$  durch  $e$  hervorgerufen wird, stimmen die zu  $B$  und zu  $e$  gehörigen Standardabweichungen  $\sigma_B$  und  $\sigma_e$  überein. Es gilt also

$$(2.11) \quad \sigma_B = \sigma_e .$$

Annahme (7):

Die Zufallsgröße  $e$  besitze (näherungsweise) eine Normalverteilung, und zwar wegen (2.9) mit Erwartungswert  $\mu_e = 0$  und wegen (2.10) mit Standardabweichung  $\sigma_e = \sigma_R$ . Man schreibt hierfür symbolisch:

$$(2.12) \quad e \sim N(0; \sigma_R).$$

Wenn  $e$  normalverteilt ist, dann ist auch  $B = B_w + e$  normalverteilt und zwar wegen (2.8) und (2.10) mit  $\mu_B = B_w$  und  $\sigma_B = \sigma_e = \sigma_R$ , also in Kurzschreibweise

$$(2.13) \quad B \sim N(B_w; \sigma_R).$$

Aus den Annahmen (4) bis (7) folgt zusammen mit (2.4) und (2.5):

$$(2.14) \quad B = B_{\text{Soll}} + e \quad \text{mit} \quad B \sim N(B_{\text{Soll}}; \sigma_R).$$

Die Normalverteilung läßt sich graphisch anhand der bekannten "Gauß'schen Glockenkurve" veranschaulichen. Eine solche ist in Bild 2.3 für die prüfbedingte Abweichung  $e$  mit  $\mu_e = 0$  und  $\sigma_e = \sigma_R = 0.15$  bzw. für  $\mu_B = B_w$  und  $\sigma_B = \sigma_e = 0.15$  skizziert.

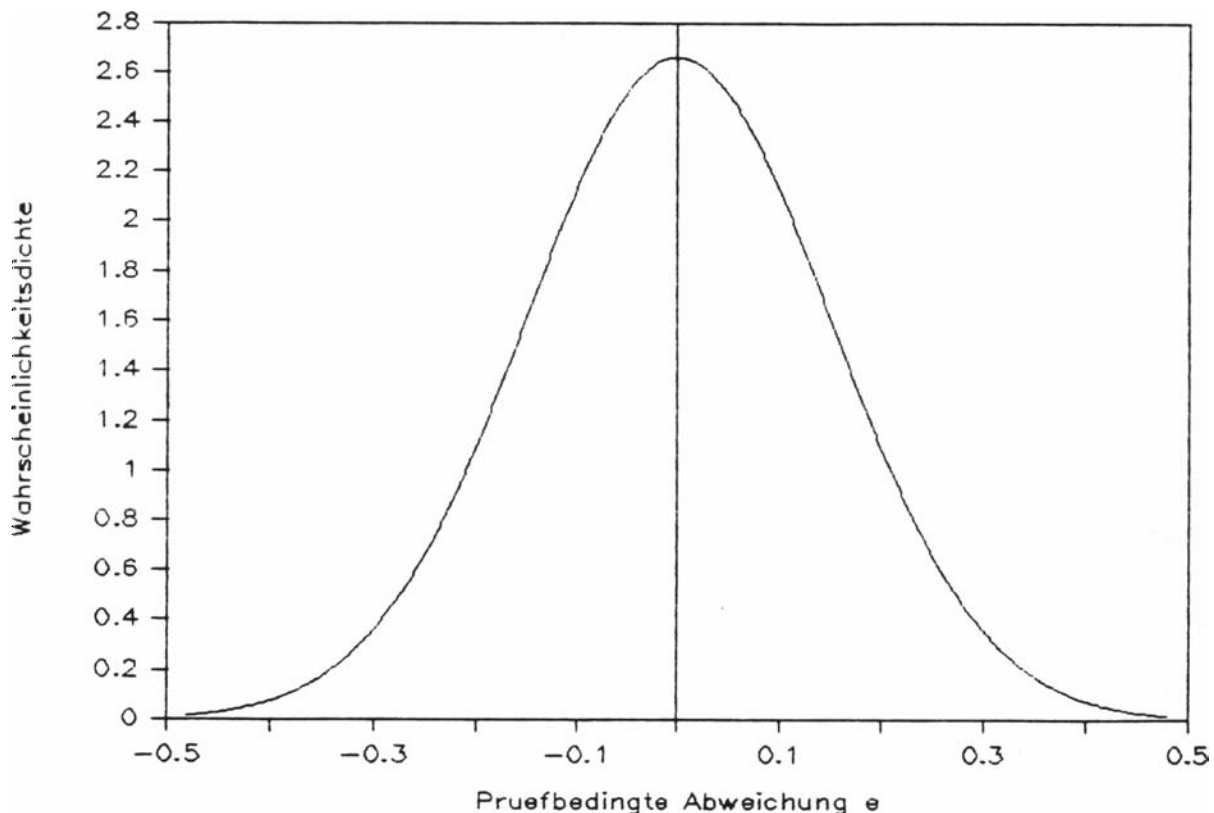
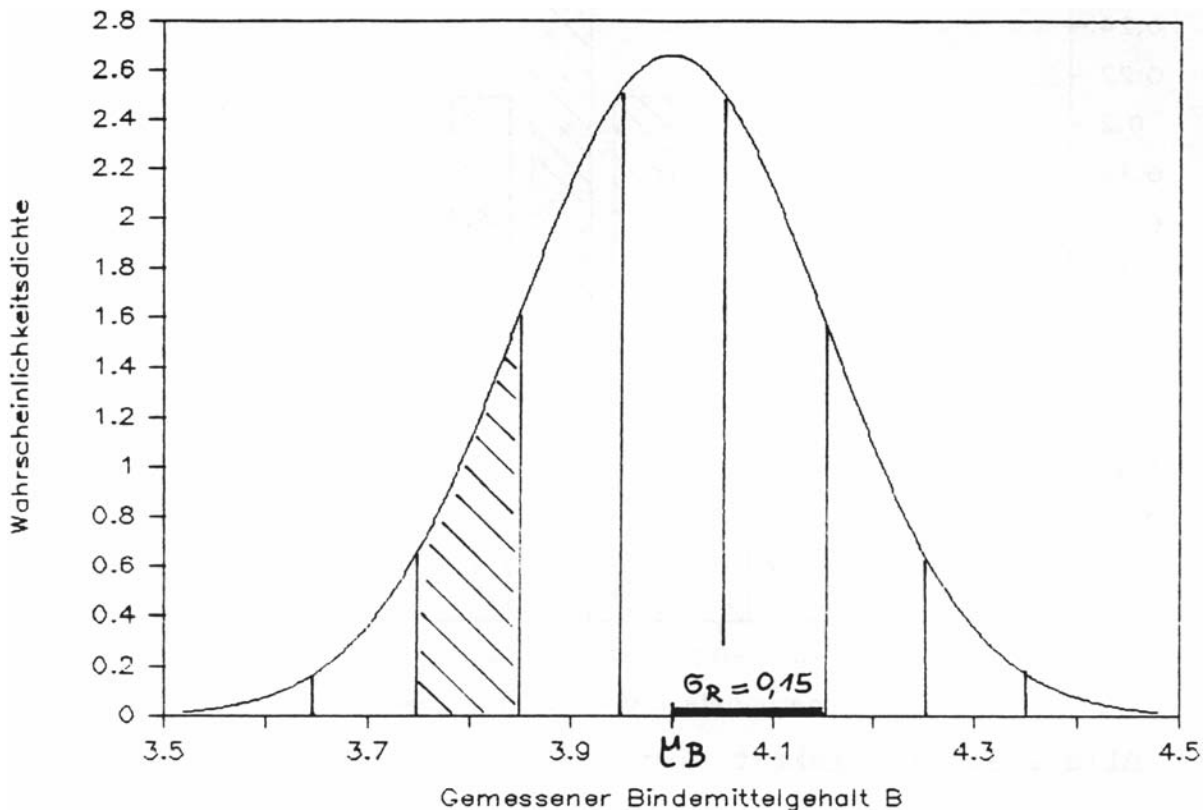


Bild 2.3: Die Gauß'sche Glockenkurve für prüfbedingte Zufallsabweichungen  $e$  mit Erwartungswert  $\mu_e=0$  und Standardabweichung  $\sigma_e$ .

Der Erwartungswert  $\mu_B$  als "Schwerpunkt" oder "Zentrum" der Verteilung befindet sich im Symmetriepunkt, also an der Maximalstelle der Glockenkurve. Die Standardabweichung  $\sigma_R$  ist geometrisch als Strecke zwischen Maximalstelle und Wendepunkt der Glockenkurve darstellbar.

Für eine Normalverteilung liegen bekanntlich 99,7% aller Werte, also praktisch "fast alle" Werte im sogenannten "6 $\sigma$ -Bereich" mit der Untergrenze  $\mu - 3\sigma$  und der Obergrenze  $\mu + 3\sigma$ , siehe Bild 2.3. Für das Zahlenbeispiel in Bild 2.4 mit  $\mu_B = 4,0$  und  $\sigma = \sigma_R = 0,15$  ergibt sich für die Bindemittelgehalte B dementsprechend der 6 $\sigma$ -Bereich  $3,55 \leq B \leq 4,45$ .



**Bild 2.4:** Die Gauß'sche Glockenkurve für gemessene Bindemittelgehalte B mit Erwartungswert  $\mu_B = 4,0$  und Standardabweichung  $\sigma_R = 0,15$

Das mathematische Modell "Normalverteilung" für gemessene Bindemittelgehalte bedeutet, daß man sich die möglichen Bindemittelgehaltswerte als reelle Zahlen vorstellt, die auf der Zahlengeraden mit beliebig vielen Nachkommastellen beliebig "dicht" liegen, die also ein Kontinuum darstellen.

Die Praxis sieht jedoch anders aus. Nach DIN 1996, Teil 6, /5/, sind die in Gewichts-Prozent ermittelten Bindemittelgehalte auf eine Nachkommastelle zu runden, sodaß sie nur Skalenwerte auf einem Skalenraster mit Rasterabstand 0,1 Gew.-%, also nur endlich viele rationale Zahlenwerte annehmen können. Bei diesem Rundungsvorgang werden beispielsweise alle Werte des Intervalls  $3,75 \leq B < 3,85$  auf den Zahlenwert 3,8 abgebildet: Die Wahrscheinlichkeit, mit der dieser Wert 3,8 auftritt, ist dann geometrisch darstellbar als Flächeninhalt unter der Gauß'schen Glockenkurve über dem Intervall  $3,75 \leq B \leq 3,85$ , vgl. Bild 2.4. Entsprechendes gilt natürlich auch für alle anderen nach DIN 1996 möglichen Bindemittelgehaltswerte und deren zugehörige Intervalle, vgl. Bild 2.4.

Durch den Rundungsvorgang kommt man so von der "stetigen" Normalverteilung, dargestellt durch die Gauß'sche Glockenkurve, zur "diskretisierten" Normalverteilung, die geometrisch in Form eines sog. "Stabdiagramms" darzustellen ist, siehe Bild 2.5.

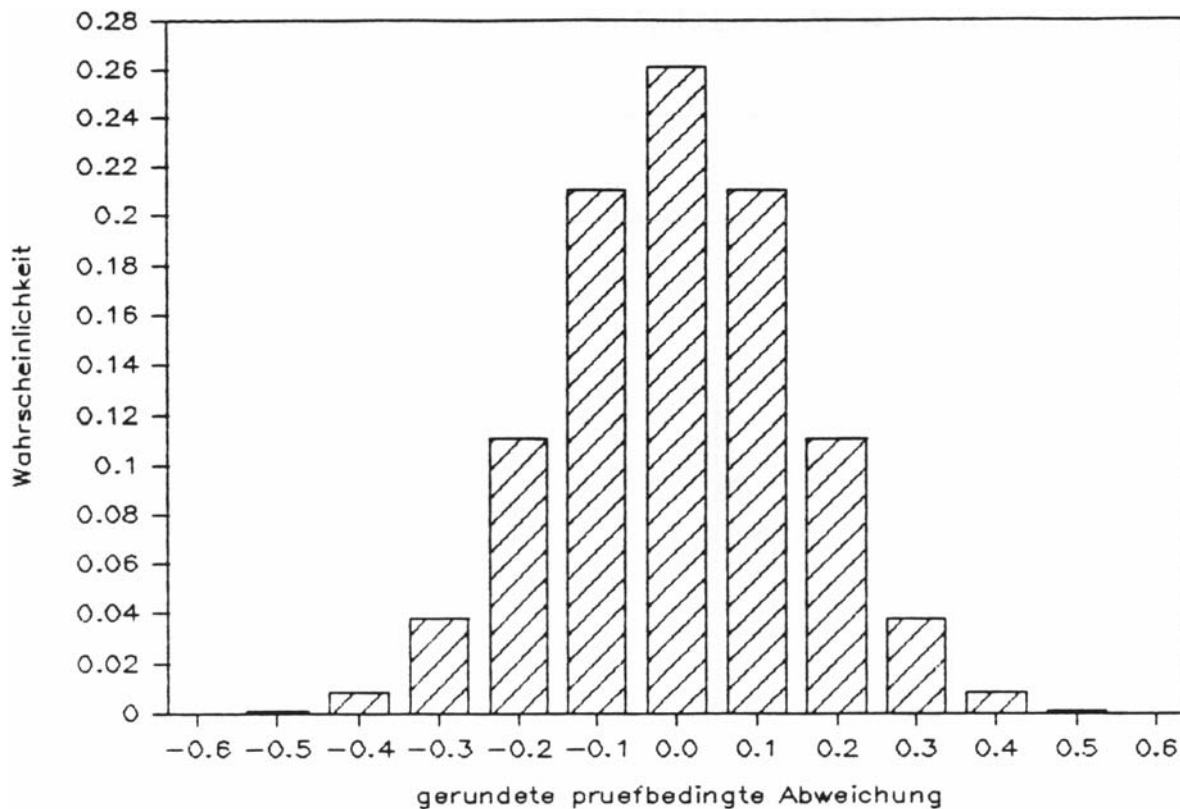


Bild 2.5: Die diskretisierte Normalverteilung zu Bild 2.4

Im Stabdiagramm sind die Wahrscheinlichkeiten, mit denen die gerundeten Bindemittelgehaltswerte bzw. gerundeten prüfbedingten Abweichungen  $e$  angenommen werden, als Stablängen aufgetragen. Die Zahlenwerte der Wahrscheinlichkeiten  $W$  aus Bild 2.5 sind in Tabelle 2.1 zusammengestellt.

Tabelle 2.1:

e	0.0	±0.1	±0.2	±0.3	±0.4	±0.5	±0.6
W	0.2611	0.2108	0.1109	0.0380	0.0085	0.0012	0.0001

Eine mathematisch-statistische Diskussion zeigt, daß sich die Rundungsfehler bei der Rundung der B-Werte auf 0,1 Gew.-% praktisch nicht auf die Standardabweichung  $\sigma_B$  auswirkt, siehe Anhang 1.

Die nachfolgenden Erörterungen und Berechnungen werden anhand der diskretisierten Normalverteilung vorgenommen, zum einen, weil dies dem tatsächlichen Vorgehen nach DIN 1996 entspricht, zum anderen, weil man mit der diskretisierten Normalverteilung bequemer arbeiten kann.

#### 4. Diskussion der Bindemittelmengengleitklausel

In dem mit "Ermittlung des Abrechnungseinheitspreises" überschriebenen Abschnitt 3.2 zum Leistungsbereich 9.10 (Tragschichten) der Leistungsbeschreibung für den Straßen- und Brückenbau in Bayern (LB-StB-BY), vgl. /1/, sind folgende Festlegungen getroffen:

##### "Bindemittelmengengleitklausel

Ist im Leistungsverzeichnis bei einer OZ ein kalkulierter Bindemittelgehalt angegeben, so gilt für die Ermittlung des der Abrechnung zugrunde zu legenden Einheitspreises das jeweils zutreffende der folgenden Verfahren:

##### a) Abrechnung nach Dicke

$$EP_{ab} = EP_{an} + (B_{ist} \cdot V/100 - B_k) \cdot D \cdot BP$$

##### b) Abrechnung nach Gewicht

$$EP_{ab}^* = EP_{an}^* + (B_{ist} \cdot V/100 - B_k) \cdot (1/\varrho'_A) \cdot BP$$

$EP_{ab}$  = abzurechnender Einheitspreis in DM/m<sup>2</sup>

$EP_{ab}^*$  = abzurechnender Einheitspreis in DM/t

$EP_{an}$  = angebotener Einheitspreis in DM/m<sup>2</sup>

$EP_{an}^*$  = angebotener Einheitspreis in DM/t

$B_{ist}$  = Bindemittelgehalt, ermittelt aus den Ergebnissen der Kontrollprüfungen in kg/m<sup>3</sup> Mischgut. Der Abrechnung ist der auf 0,1 Gew.-% gerundete Mittelwert des Bindemittelgehaltes aus den Kontrollprüfungen zugrunde zu legen.

$B_k$  = kalkulierte Bindemittelmenge in kg/m<sup>3</sup> Mischgut

$D$  = Solldicke in m

$BP$  = Bindemittelpreis in DM/kg gemäß Bieterangaben

$V$  = arithmetisches Mittel der Verdichtungsgrade in %

$\varrho'_A$  = Raumdichte des Marshallkörpers der Eignungsprüfung bzw. der Sollrezeptur in t/m<sup>3</sup>

Sofern der aus der Kontrollprüfung ermittelte Bindemittelgehalt (Mittelwert) den aufgrund der Eignungsprüfung ermittelten Bindemittelgehalt um mehr als 0,1 Gew.-% überschreitet, ist der um 0,1 Gew.-% erhöhte Bindemittelgehalt aus der Eignungsprüfung bei der Ermittlung des abzurechnenden Einheitspreises anstelle des bei der Kontrollprüfung ermittelten Bindemittelgehaltes zugrunde zu legen."

In a) und b) sind die Größen  $EP_{an}$ ,  $B_k$ ,  $D$  und  $BP$  spezifisch für ein konkretes Prüflos vorzugebende Konstante. Die Werte für die Größen  $B_{ist}$ ,  $V$  und  $\varrho'_A$  sind empirisch anhand der entsprechenden Prüfverfahren zu bestimmen.

Um die beabsichtigten analytischen Untersuchungen, die sich primär mit dem Bindemittelgehalt befassen, nicht mit unnötigen Komplikationen zu überfrachten, werden sie unter den drei nachfolgend aufgelisteten Vereinfachungen (i) bis (iii) vorgenommen.

- (i) Die Werte für  $V$  und  $\varrho'_A$  seien für das Mischgut in der Eignungsprüfung "exakt" ermittelt, sodaß sie nachfolgend wie Konstante behandelt werden können.

- (ii) Um den Einfluß des Verdichtungsgrades  $V$  herauszunehmen, werde  $V = 100\%$  gesetzt.
- (iii) Es werde eine Prüflosfläche von  $6\,000\text{ m}^2$  betrachtet, sodaß gemäß ZTVT oder ZTV bit bei der Kontrollprüfung eine Bindemittelgehaltsbestimmung (an einer Mischgutprobe oder an einem Bohrkern) nach DIN 1996 durchgeführt wird, vgl. auch Annahme (1) von Abschnitt 2.

Nach DIN 1996, Teil 6 /5/ wird der Bindemittelgehalt  $B := B_{\text{DIN}}$  in Gew.-% ermittelt, in der Gleitklausel wird jedoch, - wie schon aus der Bezeichnung hervorgeht, nach Bindemittelmengen  $B_{\text{ist}}$  gerechnet und zwar in  $\text{kg/m}^3$ . Mit Hilfe der in  $\text{t/m}^3$  angegebenen Raumdichte  $\zeta'_A$  wird  $B$  nach  $B_{\text{ist}}$  wie folgt umgerechnet.

$$(3.1) \quad B_{\text{ist}} [\text{kg/m}^3] = (B/100) \cdot 1000 \cdot \zeta'_A = 10 B \cdot \zeta'_A .$$

In gleicher Weise errechnet sich die kalkulierte Bindemittelmenge  $B_K$  in  $\text{kg/m}^3$  aus dem in Gew.-% vorgegebenen Sollwert  $B_{\text{Soll}}$  :

$$(3.2) \quad B_K [\text{kg/m}^3] = B_{\text{Soll}} \cdot 10 \cdot \zeta'_A .$$

Durch Einsetzen von  $B_{\text{ist}}$  und  $B_K$  in die Formel für  $EP_{ab}^*$  erhält man:

$$(3.3) \quad EP_{ab}^* [\text{DM/t}] = EP_{an}^* + (B \cdot V/100 - B_{\text{Soll}}) \cdot (10 \text{ BP})$$

(Bemerkung: Wird  $EP_{ab}^*$  nach der Formel b) aus /1/ anhand von  $B_{\text{ist}}$  und  $B_K$  errechnet, dann muß natürlich gewährleistet sein, daß dort für  $\zeta'_A$  und  $V$  genau dieselben Werte eingesetzt werden, wie sie zur Umrechnung von  $B$  nach  $B_{\text{ist}}$  und von  $B_{\text{Soll}}$  nach  $B_K$  verwendet wurden. Zur Vermeidung von möglichen Fehlern an dieser Stelle wäre es besser, wenn direkt mit der Formel (3.3), also direkt mit den Werten  $B = B_{\text{DIN}}$  und  $B_{\text{Soll}}$  in Gew.-% gearbeitet und nicht der unnötige Umweg über  $B_{\text{ist}}$  und  $B_K$  beschritten würde.)

Die beiden Formeln für  $EP_{ab}$  und  $EP_{ab}^*$  unterscheiden sich nur durch den konstanten Faktor  $(\zeta'_A \cdot D)$ :

$$(3.4) \quad EP_{ab} [\text{DM/m}^2] = EP_{ab}^* \cdot [\text{DM/t}] \cdot \zeta'_A [\text{t/m}^3] \cdot D [\text{m}] .$$

Zur statistischen Analyse braucht man deshalb nur die Formel (3.3) für  $EP_{ab}^*$  zu erörtern, wobei hier gemäß (ii) zur Vereinfachung  $V=100$  gesetzt wird:

$$(3.5) \quad EP_{ab}^* [\text{DM/t}] = EP_{an}^* + (B - B_{\text{Soll}}) \cdot (10 \text{ BP})$$

Wegen  $B = B_{\text{Soll}} + e$ , siehe (2.14), stellt die Differenz  $B - B_{\text{Soll}}$  nichts anderes dar als die prüfbedingte Zufallsabweichung  $e$ . Somit schreibt sich (3.5) in der Form

$$(3.6) \quad EP_{ab}^* = EP_{an}^* + e \cdot (10 \text{ BP}) .$$

Demnach unterscheidet sich der Abrechnungseinheitspreis vom Angebotspreis um den Term  $(10 \cdot \text{BP}) \cdot e$ . Dieser ist proportional zur Zufallsabweichung  $e$  mit  $(10 \cdot \text{BP}) [\text{DM/kg}]$  als Proportionalitätsfaktor.

Die Berechnung von  $EP_{ab}^*$  wird jedoch nicht generell, d.h. nicht für jeden gemessenen Bindemittelgehalt  $B$  nach Formel (3.3) bzw. (3.6) vorgenommen. Wie in /1/ aus dem Zusatztext unter der Gleitmengenklausel hervorgeht, wird dort eine Fallunterscheidung in Abhängigkeit vom gemessenen Wert  $B_{ist}$  vorgenommen:

$$(3.7) \begin{cases} EP_{ab}^* = EP_{an}^* + (B - B_{soll}) \cdot (10 \text{ BP}) & \text{für } B - B_{soll} \leq 0,1\% \\ EP_{ab}^* = EP_{an}^* + 0,1 \cdot (10 \text{ BP}) & \text{für } B - B_{soll} \geq 0,1\% \end{cases}$$

In Bild 3.1 ist  $EP_{ab}^*$  als Funktion von  $B$  graphisch dargestellt.

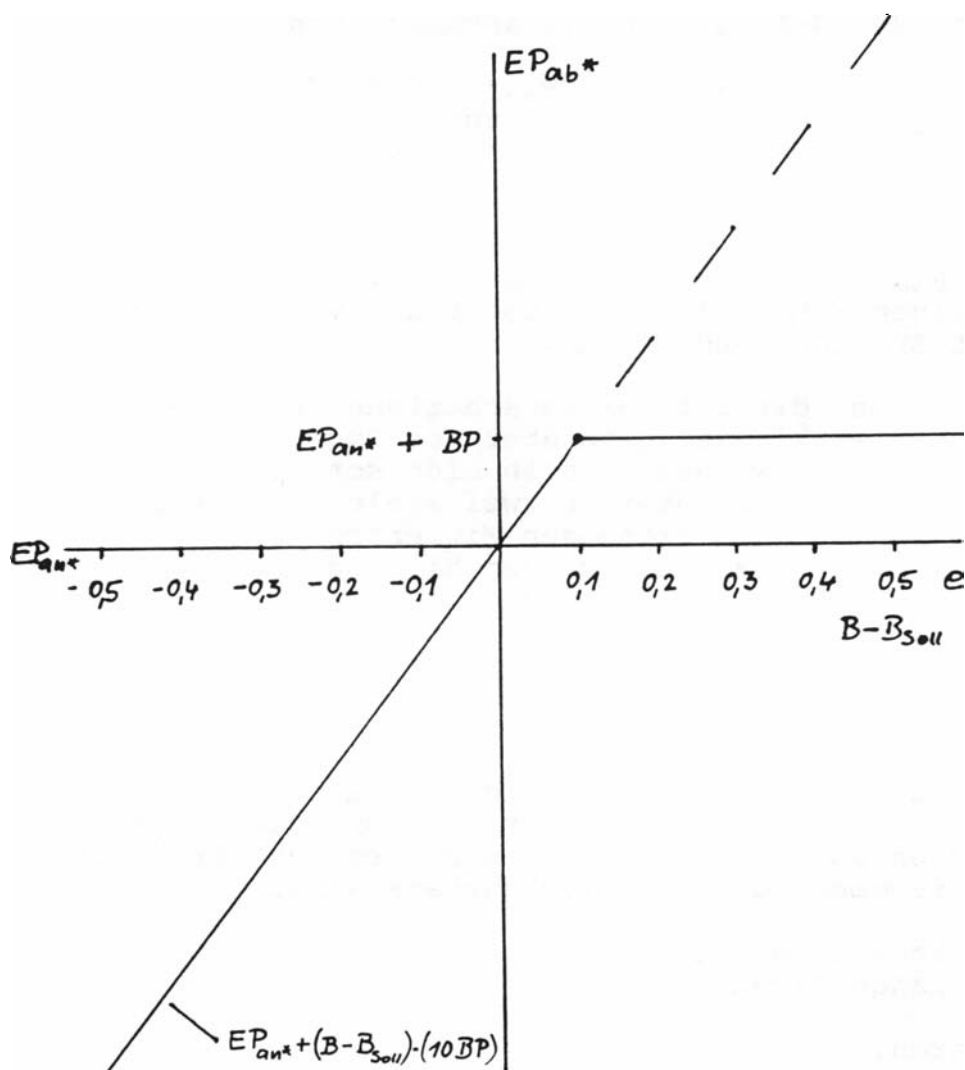


Bild 3.1:

Graphische Darstellung der Bindemittelmengengleitklausel: Der Abrechnungseinheitspreis  $EP_{ab}^*$  in Abhängigkeit von der prüfbedingten Zufallsabweichung  $e$ .

Formel (3.7) läßt sich auch - ohne eine explizite Fallunterscheidung wie in (3.7) zu benötigen - in einer geschlossenen Formel angeben:

$$(3.8) \quad EP_{ab}^* = EP_{an}^* + (10 \text{ BP}) \cdot \text{Min}(e; 0,1) \text{ .}$$

Diese Formel eignet sich insbesondere für analytische Untersuchungen, aber auch für die Erstellung von Computerprogrammen.

Wie aus Bild 3.1 hervorgeht, steigt  $EP_{ab}^*$  zunächst geradlinig an bis zur Stelle  $B = B_{so11} + 0,1$ . Von da ab bleibt  $EP_{ab}^*$  konstant auf dem Wert  $EP_{an}^* + 0,1 \cdot (10 \text{ BP}) = EP_{an}^* + \text{BP}$  stehen.

Der Funktionsverlauf von  $EP_{ab}^*$  in Abhängigkeit von  $B$  ist also bezüglich des Sollwerts  $B_{so11}$  asymmetrisch:

Für  $B < B_{so11}$  gilt  $EP_{ab}^* < EP_{an}^*$ , d.h. der Abrechnungseinheitspreis liegt unter dem Angebotspreis. Der Mischguthersteller muß also einen Preisabschlag hinnehmen, der umso höher ist, je geringer der Bindemittelgehalt bei der Messung ausfällt.

Für  $B > B_{so11}$  gilt  $EP_{ab}^* > EP_{an}^*$ , d.h. der Mischguthersteller erhält einen Mehrpreis gegenüber  $EP_{an}^*$  vergütet, der allerdings den Wert BP nicht übersteigt.

Die Absichten, die mit der Verschärfung der Abrechnungsregelungen durch die Gleitklausel gegenüber den Regelungen in ZTVT oder ZTV bit verfolgt werden, lassen sich sofort aus Bild 3.1 ersehen. Es sollen damit gleichzeitig zwei Ziele angestrebt werden: Zum einen soll durch die drohenden Minderpreise eine zu sparsame Bindemittelgehaltszugabe für den Mischguthersteller finanziell inattraktiv gemacht werden. Zum andern aber soll der Mischguthersteller daran gehindert werden, sich durch eine Überdosierung des Bindemittels nach der für ihn "sicheren" Seite zu bewegen, auf der ihm zwar keine Preisabschläge drohen, die aber aus der Sicht des Auftraggebers aus technischen Gründen unerwünscht ist.

Hier erhebt sich die Frage, ob diese beiden Ziele durch die Klausel tatsächlich erreicht werden, und die Frage, welche technischen und wirtschaftlichen Folgen aus der Gleitklausel für den Auftraggeber und den Mischguthersteller

- bei konkreten Bauvorhaben
- auf lange Sicht

resultieren.

Die Konsequenzen der Gleitklausel sollen hier zunächst für ein Prüflos von 6000 m<sup>2</sup> dargelegt werden, das die in Abschnitt 2 dargelegten idealen Eigenschaften aufweist, nämlich einen homogenen und mit dem Sollwert  $B_{so11}$  übereinstimmenden Bindemittelgehalt, vgl. die Annahmen (1) bis (3) von Abschnitt 2. Ein solches Ideallos erfüllt nicht nur die in ZTVT oder ZTV bit gestellte Sollwertanforderung an den Mittelwert des Prüfloses, sondern es beinhaltet hinsichtlich des Qualitätsmerkmals "Bindemittelgehalt" die beste Qualität, die überhaupt denkbar ist. Selbstverständlich müssen die Abrechnungsregeln so formuliert



sein, daß der Auftragnehmer für eine solche optimale Qualität stets den vollen, im Bauvertrag festgelegten Angebotspreis vergütet bekommt. Eine Abrechnungsregelung ist als ungerecht zu bezeichnen, bei der es vorkommen kann, daß sogar die beste überhaupt erreichbare und über die Anforderungen der ZTV's weit hinausgehende Qualität mit Minderpreisen belegt wird.

Diese selbstverständlichen Anforderungen an eine Abrechnungsregelung werden jedoch von der Gleitklausel (3.8) nicht erfüllt: Auch bei einem Ideallos führt danach ein gemessener Gehaltswert  $B < B_{so11}$  zu einem Abrechnungseinheitspreis, der unter dem Angebotspreis liegt. Eine solche Preisminderung tritt also ein, obwohl das Auftreten von  $B < B_{so11}$  hier überhaupt nicht auf einem tatsächlichen Mindergehalt beruht, sondern ausschließlich auf eine negative prüfbedingte Zufallsabweichung  $e = B - B_{so11} < 0$  zurückzuführen ist. Daher ist es sachlich völlig unangemessen, den Auftragnehmer für diese unkontrollierbare, unvermeidliche und von ihm nicht beeinflussbare prüfbedingte Abweichung bei der Kontrollprüfung mit Preisabschlägen zu belegen, abgesehen davon, daß die Kontrollprüfung ja nicht vom Mischguthersteller, sondern vom Auftraggeber selbst durchgeführt oder veranlaßt wird.

Genausogut sind dann natürlich auch Mehrpreise im Fall von  $B > B_{so11}$ , also bei positiver Prüfabweichung  $e = B - B_{so11} > 0$  bei einem Ideallos völlig unangebracht; denn  $B > B_{so11}$  darf ja nicht als tatsächlicher Mehrgehalt an Bindemittel interpretiert werden.

Ein Mischguthersteller wird hier gerne auf einen solchen, ihm nicht zustehenden Preiszuschlag verzichten, wenn er dafür im Fall  $e < 0$  von einem ungerechtfertigten Preisabschlag frei bleibt.

Das dargelegte Verhalten der Gleitklausel im Falle des Idealloses zeigt, daß bei der Konzeption der Gleitklausel die unvermeidlichen prüfbedingten Abweichungen  $e$  nicht berücksichtigt worden sind. Im Grunde genommen wird also in der Gleitklausel stillschweigend angenommen, daß prüfbedingte Abweichungen stets den Wert Null besitzen, also nicht existieren. Diese Annahme bedeutet aber, daß tatsächlicher und gemessener Bindemittelgehalt einander stets gleichgesetzt werden.

Die Gleitklausel interpretiert z.B. eine negative prüfbedingte Abweichung von 0,2 Gew.-% als einen Minderbindemittelgehalt von 2 kg Bitumen pro Tonne Mischgut, woraus dann bei einem Bindemittelpreis von 250 DM/t, d.h. 0,25 DM/kg ein Preisabzug von 0,50 DM/t resultiert. Dieser Fall tritt etwa mit Wahrscheinlichkeit 0,11 = 11% ein (vgl. Bild 2.5 oder Tab. 2.1), d.h. etwa jedes 10. ideale Prüflös wird mit einem solchen sachlich ungerechtfertigten Preisabschlag belegt.

Dabei stehen dem Mischguthersteller keinerlei Möglichkeiten zur Verfügung, diesen Verlust zu vermeiden, der offensichtlich - unter der Annahme 3 von Abschnitt 2 - nicht von ihm, sondern allein durch die unvermeidbare und zufallsbedingte Ungenauigkeit der Bindemittelgehaltsbestimmung verursacht ist. Insoweit wird der aus der Gleitklausel (3.7) resultierende Abrechnungseinheitspreis fast ausschließlich durch den Zufall bestimmt.

Sowohl aus technischen als auch aus statistischen Gründen müssen jedoch tatsächliche und zugehörige gemessene Werte begriffsmäßig und zahlenmäßig streng unterschieden werden. Diesen Unterschied gilt es bei allen Arbeitsgängen zu beachten, also bei der Kalkulation, bei der Abnahme und natürlich auch bei der Abrechnung.

Bei der Abrechnung nach der Gleitklausel darf unter keinen Umständen der prinzipiell mögliche Mehrpreis als eine Kompensation eines aktuell auftretenden Minderpreises fehlinterpretiert werden. Einem Mischguthersteller, der allein aufgrund einer negativen prüfbedingten Abweichung einen unter Umständen erheblichen finanziellen Verlust wegen eines aus der Gleitklausel resultierenden Minderpreises erleidet, nützt die fehlplazierte Argumentation nichts, er hätte ja im Prinzip einen Mehrpreis erzielen können, wenn nur die prüfbedingte Abweichung positiv gewesen wäre. Diese Argumentation ist natürlich auch schon deswegen völlig abwegig, da weder der Mischgutproduzent noch der Auftraggeber die zufälligen prüfbedingten Abweichungen beeinflussen kann (vorausgesetzt das Prüfverfahren wird normgerecht und korrekt durchgeführt, wovon man jedoch allgemein ausgehen muß.)

Mit den Zufallsgrößen  $e = B - B_{\text{ Soll }}$  und  $B$  ist wegen (3.6) und (3.7) natürlich auch  $EP_{ab}^*$  eine Zufallsgröße. Von dieser interessiert insbesondere der Durchschnittswert, also der Erwartungswert  $E(EP_{ab}^*)$  oder die durchschnittliche Differenz von Abrechnungs- und Angebotspreis, also  $E(EP_{ab}^* - EP_{an}^*)$ .

Da die Preiszuschläge für  $e \geq 0,1$  durch BP beschränkt sind, während die Preisabschläge  $(10 \text{ BP}) \cdot e$  bei  $e < 0$  unbeschränkt und proportional zu  $e$  sind, vgl. Bild 3.1, ist aufgrund dieser Asymmetrie von vornherein klar, daß die Preisabschläge im Mittel die Preiszuschläge überwiegen. Demzufolge ist die durchschnittliche Preiskorrektur  $E(EP_{ab}^* - EP_{an}^*)$  negativ. Das bedeutet für den Auftraggeber eine durchschnittliche Einsparung (gemessen in DM/t) gegenüber dem vom Produzenten kalkulierten Angebotspreis, und zwar eine ungerechtfertigte Einsparung auf Kosten des Auftragnehmers.

Nach dieser verbalen Darstellung und Argumentation sollen nun die Zahlenwerte von  $E(EP_{ab}^*)$  und  $E(EP_{ab}^* - EP_{an}^*)$  exakt bestimmt werden und zwar anhand der diskreten Normalverteilung als Verteilung der prüfbedingten Abweichungen  $e$ , siehe Annahme (7) von Abschnitt 2, sowie Bild 2.5 und Tab 2.1.

Tabelle 3.1:

(1) Abwei- chung $e_1$	(2) $\text{Min}(e_1; 0,1)$ $a_1$	(3) Wahrsch.- lichk. $W_1$	(4) $a_1 \cdot W_1$
-0.6	-0.6	0.0001	-0.0001
-0.5	-0.5	0.0012	-0.0006
-0.4	-0.4	0.0085	-0.0034
-0.3	-0.3	0.0380	-0.0114
-0.2	-0.2	0.1109	-0.0222
-0.1	-0.1	0.2108	-0.0211
0.0	0.0	0.2611	0.0000
0.1	0.1	0.2108	0.0211
0.2	0.1	0.1109	0.0111
0.3	0.1	0.0380	0.0038
0.4	0.1	0.0085	0.0009
0.5	0.1	0.0012	0.0001
0.6	0.1	0.0001	0.0000
Summe:		1.0000	-0.0218

Die Berechnung wird anhand von Tab. 3.1 erläutert. Ausgehend von den diskreten Werten der Abweichungen  $e_1$ , vgl. Spalte (1), werden zur Berechnung von  $EP_{ab}^*$  nach Formel (3.8) zunächst die Werte  $a_1 := \text{Min}(e_1; 0,1)$  bestimmt, vgl. Spalte (2). Dann hat man die Werte  $a_1$  mit den zugehörigen in Spalte (3) angegebenen (aus Tab. 2.1 hierher übertragenen) Wahrscheinlichkeiten  $W_1$  der diskretisierten Normalverteilung zu multiplizieren. Die Produkte  $a_1 \cdot W_1$  sind in Spalte (4) notiert. Deren Spaltensumme  $\sum a_1 \cdot W_1$  ergibt den Zahlenwert -0,0218 Gew.-%. Dieser Wert stellt die durchschnittliche, auf den Bindemittelpreis bezogene Preiskorrektur gemäß Gleitklausel (3.7) dar, d.h. es gilt:

$$(3.9) \quad \sum a_1 \cdot W_1 = E((EP_{ab}^* - EP_{an}^*) / (10 \text{ BP})) = -0,0218 \text{ Gew.-%}.$$

Dies bedeutet bei einem Bitumenpreis von 250 DM/t, d.h. 0,25 DM/kg, für den Mischguthersteller einen durchschnittlichen Preisabschlag in Höhe von  $0,0218 \cdot (10 \text{ BP}) = 0,0218 \cdot (10 \cdot 0,25) = 0,0545$  DM pro Tonne Mischgut und für den Auftraggeber eine entsprechende durchschnittliche Einsparung.

Bei der Gleitklausel (3.7) stimmt also das Qualitätsoptimum nicht mit dem Kostenoptimum überein. Dies wirkt aber den eigentlichen Absichten der Gleitklausel entgegen. Der errechnete durchschnittliche Preisabschlag, sprich Verlust, mag vielleicht auf den ersten Blick geringfügig erscheinen. Er summiert sich aber bei Hochrechnung auf die Jahrestonnage von einzelnen Mischgutherstellern oder aller regionalen Hersteller zu Beträgen von Tausenden von DM; vgl. hierzu insbesondere auch die Ausführungen in Abschnitt 4. Dieser Verlust muß natürlich herstellerseits in der Kalkulation der Angebotspreise berücksichtigt werden. Insoweit führt die Gleitklausel nicht - wie eigentlich beabsichtigt - zu einer realen Qualitätsverbesserung, sondern nur zu einer Preiserhöhung, ohne daß dadurch für den Auftraggeber oder den Mischguthersteller etwas gewonnen würde. Demzufolge wirkt die Gleitklausel in hohem Maße kontraproduktiv.

Bemerkung:

Falls in der Gleitklausel die Preiskorrekturen anders als in (3.7) symmetrisch zum Sollwert  $B_{soll}$  festgelegt wären und zwar gemäß einer für alle e-Werte gültigen Formel (3.6), dann erhielte man als mittlere Preiskorrektur

$$(3.10) \quad E(EP_{ab}^* - EP_{an}^*) = (10 \text{ BP}) \cdot \Sigma(e_i \cdot W_i) = 0 \text{ .}$$

Dies ergibt sich durch Einsetzen der Abweichungen  $e_i$  von Spalte (1) und der Wahrscheinlichkeiten  $W_i$  aus Spalte (3) von Tab. 3.1. Dieses Resultat ist anschaulich klar; denn sowohl die Beträge der  $e_i$ -Werte als auch die  $W_i$ -Werte sind symmetrisch zum Wert Null, sodaß bei der Mittelbildung jeweils ein Preiszuschlag durch einen entsprechenden Preisabschlag kompensiert wird.

Aufgrund von (3.10) erzielt der Auftraggeber langfristig keine Einsparung auf Kosten des Mischgutherstellers. Wohl aber erleidet der einzelne Mischgutlieferant bei konkreten Bauvorhaben mit 37%-iger Wahrscheinlichkeit einen

- Preisabschlag, wenn er das "Pech" hat, daß die prüfbedingte Abweichung einen Wert  $e < -0.05 \text{ Gew.-%}$  annimmt.
- Preiszuschlag, wenn er das "Glück" hat, daß der Fall  $e > 0.05 \text{ Gew.-%}$  eintritt.

Demzufolge sind gegen eine solche "symmetrische" Gleitklausel die gleichen Argumente vorzubringen wie gegen die "asymmetrische" Gleitklausel (3.7):

Die prüfbedingten Zufallsabweichungen werden stillschweigend negiert, sodaß auch hier die gemessenen den tatsächlichen Bindemittelgehalten gleichgesetzt werden. Daher sind die allein von prüfbedingten Zufallsabweichungen herrührenden Preisabschläge ungerechtfertigt.

## 5. Zufallsstrebereiche für gemessene Bindemittelgehalte

Faßt man an dieser Stelle zunächst die vorangegangenen Erörterungen zusammen, so ergibt sich folgendes Bild:

Die Gleitklausel basiert de facto auf der sowohl aus technischer wie auch aus statistischer Sicht unzutreffenden Annahme, daß der tatsächliche und der gemessene Bindemittelgehalte übereinstimmen und somit stillschweigend prüfbedingte Zufallsabweichungen  $e$  als nichtexistent betrachtet werden.

Diese zufallsbedingten Abweichungen müssen jedoch berücksichtigt werden und zwar unter der Verwendung des Zufallsstrebereiches. Bei normalverteilten Abweichungen  $e$  ist dieser Bereich ein symmetrisch um den Erwartungswert  $\mu_e = 0$  anhand der Vergleichsstandardabweichung  $\sigma_R$  abgegrenztes Intervall mit den Grenzen  $\pm z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma_R$ , innerhalb derer die prüfbedingten Abweichungen  $e$  mit der Statistischen Sicherheit  $1-\alpha$  zu erwarten sind:

$$(4.1) \quad W( \underbrace{-z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma_R \leq e \leq +z_{1-\alpha/2} \sigma_R}_{\text{Zufallsstrebereich}} ) = 1 - \alpha.$$

In der Technischen Statistik hat sich für die Statistische Sicherheit der Wert  $1 - \alpha = 95\%$  eingebürgert; hierzu gehört der Wert  $z := z_{1-\alpha/2} = 1,96$ ; vgl. z.B. /8/.

Gelegentlich wird jedoch zu  $1-\alpha = 95\%$  nicht der exakte Wert  $z=1,96$ , sondern der aufgerundete Wert  $z=2,0$  verwendet, um rasch Überschlagsrechnungen vornehmen zu können. Dies kommt einer geringfügigen Erhöhung der Statistischen Sicherheit von 95% auf 95,44% gleich und bedeutet eine Rundung nach der sicheren Seite.

Arbeitet man dementsprechend mit  $z=2,0$ , so ergibt sich bei der Bindemittelgehaltsbestimmung für prüfbedingte Zufallsabweichungen  $e$  aus der Vergleichsstandardabweichung  $\sigma_R = 0,15$  Gew.-% der Zufallsstrebereich

$$(4.2) \quad W( -0,3 \leq e \leq +0,3 ) \approx 95\%$$

Im Zusammenhang mit einem vorgegebenen Sollwert  $B_{\text{Soll}}$  für den Bindemittelgehalt bedeutet dies: Abweichungen gemessener Bindemittelgehalte  $B$  vom Sollwert  $B_{\text{Soll}}$  um höchstens  $\pm 0,3$  Gew.-% sind im Rahmen der vorgegebenen Statistischen Sicherheit 95% allein durch die unvermeidlichen prüfbedingten Zufallsabweichungen erklärbar. Aufgrunddessen dürfen beobachtete Bindemittelgehalte  $B$  innerhalb des Zufallsstrebereiches

$$(4.3) \quad B_{\text{Soll}} - 0,3 \leq B \leq B_{\text{Soll}} + 0,3$$

nicht zu Änderungen des Angebotspreises führen. Falls daher eine Gleitklausel technisch und statistisch korrekt konzipiert werden soll, dürfte es also nur für  $B$ -Werte außerhalb des Bereiches (4.3) zu einer Änderung des Abrechnungseinheitspreises kommen; für  $B$ -Werte innerhalb dieses Bereiches ist jedoch stets der volle Angebotspreis zu vergüten.

Bei der Vorgabe von  $1-\alpha=95\%$  hat  $\alpha=5\%$  die Bedeutung einer Irrtumswahrscheinlichkeit: Trotz eingehaltenem Sollwert liegt die prüfbedingte Zufallsabweichung mit Wahrscheinlichkeit  $\alpha=5\%$  außerhalb des Zufallsstrebereichs  $B_{\text{Soll}} \pm 0,3 \text{ Gew.}\%$ , und zwar jeweils mit der Wahrscheinlichkeit  $\alpha/2=2,5\%$  unterhalb der linken und oberhalb der rechten Bereichsgrenze. Mit 2,5%-iger Wahrscheinlichkeit erhält dann der Auftragnehmer trotz eingehaltenem Sollwert ungerechtfertigterweise einen Preisabzug. Die Wahrscheinlichkeit  $\alpha/2=2,5\%$  ist demnach als Risiko des Mischgutherstellers interpretierbar.

Falls der Zufallsstrebereich (4.3) aus der Interessensicht des Auftraggebers zu breit erscheint, sollte auf keinen Fall der Bereich dadurch enger gemacht werden, daß man einen kleineren  $z$ -Wert und damit eine kleinere Statistische Sicherheit  $1-\alpha$  vorgibt. Denn das geht einseitig zu Lasten des Auftragnehmers, weil dann die Statistische Sicherheit  $1-\alpha$  sinkt und damit das Auftragnehmerisiko steigt.

(Bemerkung: Bei der derzeit maßgeblichen Gleitklausel (3.8) ist offensichtlich  $z=0$  und damit  $1-\alpha=0\%$  gesetzt worden.)

Zur Reduktion der Breite des Zufallsstrebereichs gibt es prinzipiell zwei Möglichkeiten, die auch miteinander kombiniert werden können, eine technische und eine statistische, siehe dazu Anhang 2.

In Abschnitt 3 wurden die Eigenschaften und Auswirkungen der Gleitklausel unter folgenden vereinfachenden Annahmen untersucht:

- a) homogener mit dem Sollwert übereinstimmender Bindemittelgehalt im Prüflos (sog. "Ideallos"), d.h. Variabilität des Bindemittelgehaltes wird ausschließlich durch die unvermeidliche Prüfstreuung verursacht.
- b) Konstanz von Verdichtungsgrad  $V$  und Raumdichte  $\rho'_A$ , d.h. exakte Bestimmung von  $V$  und  $\rho'_A$ .
- c) Baumaßnahme von  $6000 \text{ m}^3$ , d.h. eine Bindemittelgehaltsbestimmung

Es ist nun natürlich folgende Frage zu klären: In welcher Weise ändern sich die hergeleiteten und erörterten Resultate von Abschnitt 3, wenn man nicht die vereinfachenden und einschränkenden Annahmen a) bis c), sondern realistische, uneingeschränkte Bedingungen zugrundelegt?

#### a) Berücksichtigung produktionsbedingter Streuungen

Sowohl dem Auftraggeber als auch dem Mischguthersteller ist klar, daß die Produktion eines Idealloses technisch nicht erreichbar ist, und zwar aufgrund der unkontrollierbaren und unvermeidbaren Störgrößen, die bei Herstellung, Transport und Einbau wirken, vgl. Bild 2.1. Die beobachtete Gesamtstandardabweichung  $\sigma_{\text{Ges}}$  der Bindemittelgehalte in einem "Real"-Los wird also größer sein als die bei einem Ideallos auftretende Vergleichsstandardabweichung  $\sigma_R$ . Es gilt also  $\sigma_{\text{Ges}} > \sigma_R$ , vgl. auch Bild 2.1.

Dem wird in ZTVT, Abschnitt A2.3, und in ZTV bit, Abschnitt A2.3, dadurch Rechnung getragen, daß Abzüge erst nach Überschreitung der zulässigen Gesamttoleranz in Höhe von 0,5 Gew.-% erfolgen. Dabei ist unter Annahme einer Normalverteilung für das Prüfmerkmal "Bindemittelgehalt" die Gesamttoleranz so festgelegt, daß bei Einhaltung des Sollwerts  $B_{\text{Soll}}$  mit der vorgegebenen Statistischen Sicherheit  $1-\alpha = 95\%$  keine Abzüge vorkommen, daß jedoch mit der Irrtums-Wahrscheinlichkeit  $\alpha = 5\%$  trotz Einhaltung des Sollwerts fälschlicherweise Abzüge vorgenommen werden; vgl Bild. 4.1.

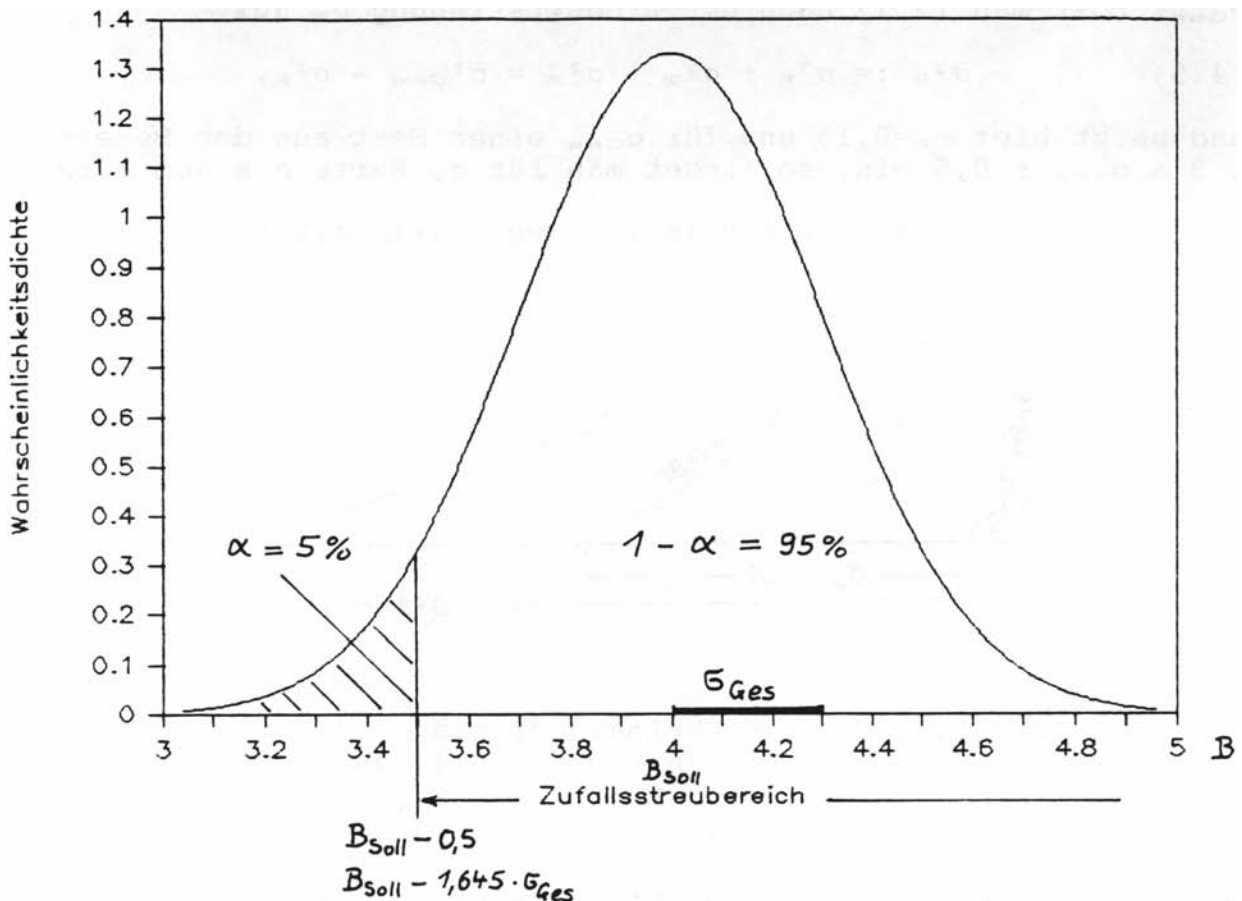


Bild 4.1:

Der einseitig nach unten abgegrenzte Zufallsstreuungsbereich zur Statistischen Sicherheit  $S=1-\alpha=95\%$  für Bindemittelgehalte gemäß der in ZTVT und ZTVbit vorgegebenen Gesamttoleranz

Der abgebildete Bereich  $B \geq B_{\text{Soll}} - z_{1-\alpha} \cdot \sigma_{\text{Ges}}$  stellt - in statistischer Sprechweise - einen einseitig nach unten abgegrenzten Zufallsstreuungsbereich zur Statistischen Sicherheit  $1-\alpha$  dar. Demzufolge ist die untere Grenze ( $B_{\text{Soll}} - 0,5$ ) aus den ZTV's als 5%-Quantile, also als ( $B_{\text{Soll}} - z_{1-\alpha} \cdot \sigma_{\text{Ges}}$ ) zu interpretieren, wobei für die Quantile  $z_{1-\alpha}$  der Standardnormalverteilung zu  $\alpha = 5\%$  speziell der Wert  $z_{1-\alpha} = z_{95\%} = 1,645$  zu setzen ist.

Aus Bild 4.1 folgt daher für  $\sigma_{Ges}$  die Bestimmungsgleichung

$$(4.4) \quad B_{Soll} - 0,5 \stackrel{!}{=} B_{Soll} - 1,645 \cdot \sigma_{Ges}.$$

Hieraus ergibt sich der Wert  $\sigma_{Ges} = 0,5/1,645 \approx 0,3$ .

(Bemerkung: Wie aus (2.3) hervorgeht, liegt  $\sigma_{Ges}=0,3$  an der unteren Grenze des aus Erfahrung bekannten Wertebereiches für  $\sigma_{Ges}$ . Löst man (2.1) nach der Produktstreuung  $\sigma_P$  auf,

$$(4.5) \quad \sigma_P^2 := \sigma_H^2 + \sigma_T^2 + \sigma_E^2 = \sigma_{Ges}^2 - \sigma_R^2,$$

und setzt hier  $\sigma_R=0,15$  und für  $\sigma_{Ges}$  einen Wert aus dem Bereich  $0,3 \leq \sigma_{Ges} \leq 0,5$  ein, so findet man für  $\sigma_P$  Werte aus dem Bereich

$$0,26 \leq \sigma_P \leq 0,48 ; \quad \text{vgl. Bild 4.2 )}$$

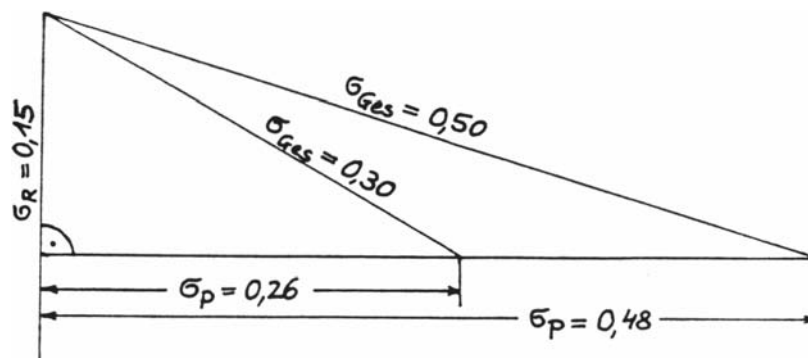


Bild 4.2:

Die Bestimmung der produktionsbedingten Standardabweichung  $\sigma_P=0,26$  bzw.  $\sigma_P=0,48$  aus der Gesamtstandardabweichung  $\sigma_{Ges}=0,30$  bzw.  $\sigma_{Ges}=0,50$  und der Vergleichsstandardabweichung  $\sigma_R=0,15$

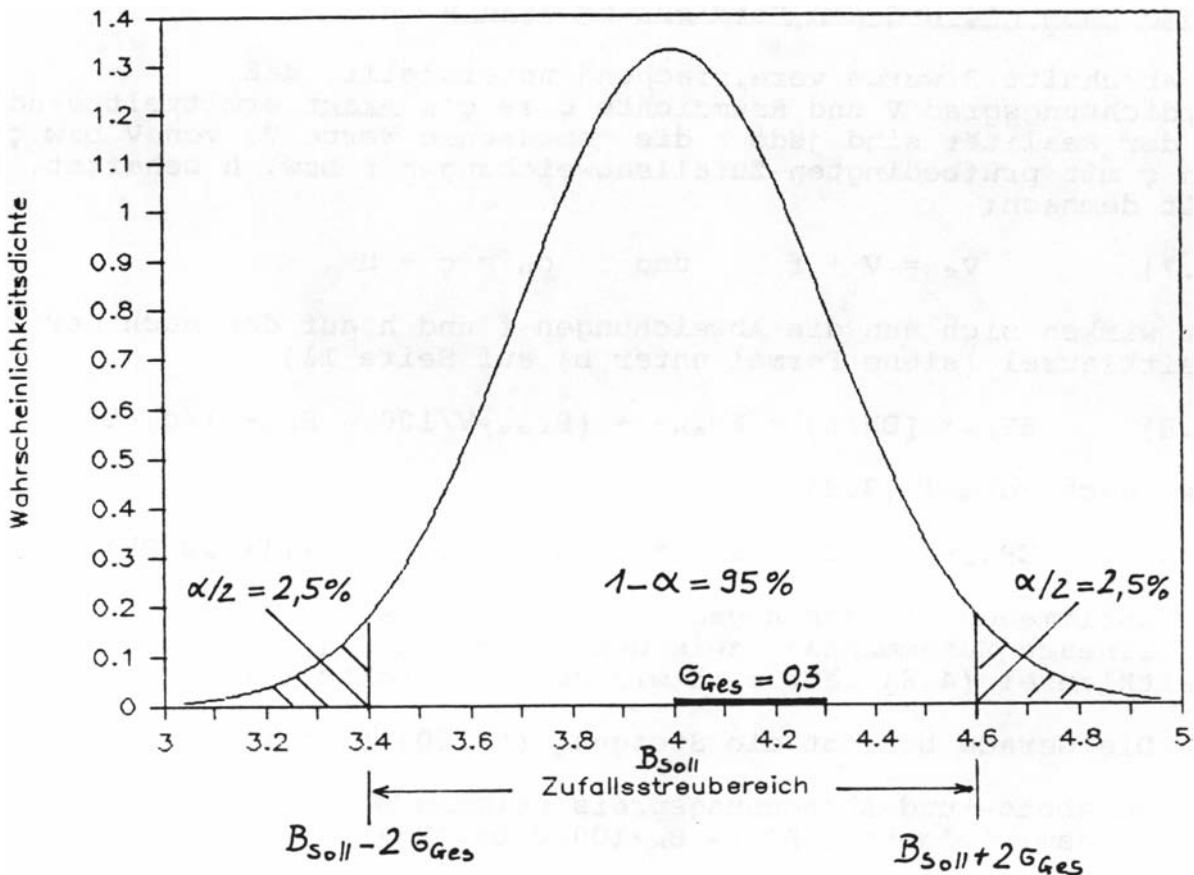
Zu dem kleinsten erfahrungsgemäß auftretenden Wert  $\sigma_{Ges} = 0,30$  gehört bei vorgegebener Statistischer Sicherheit  $1-\alpha=95\%$  mit der Quantile  $z_{1-\alpha/2} = z_{97,5\%} = 1,96 \approx 2,0$  der zweiseitig abgegrenzte Zufallsstrebereich für Bindemittelgehaltswerte aus einer Produktion mit den Grenzen

$$(4.6) \quad B_{Soll} \pm z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma_{Ges} = B_{Soll} \pm 0,6 ; \quad \text{vgl. Bild 4.3.}$$

(Bemerkung: In den ZTV bit ist  $B_{Soll} \pm 0,5$  gefordert, also eine im Vergleich zu (4.6) engere Gesamttoleranz. Demnach hat man bei der Festlegung der ZTV bit

entweder mit  $1-\alpha=90\%$ , also mit  $z_{1-\alpha/2}=1,645$  und mit  $\sigma_{Ges}=0,3$  gerechnet mit dem Ergebnis  $z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma_{Ges}=1,645 \cdot 0,3 \approx 0,5$   
oder man hat  $1-\alpha=95\%$ , also  $z_{1-\alpha/2}=1,96 \approx 2,0$  und  $\sigma=0,25$  verwendet mit dem Resultat  $z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma_{Ges} \approx 2 \cdot 0,25 = 0,5$ .)





**Bild 4.3:**  
Der zweiseitig abgegrenzte Zufallsstrebereich zur Statistischen Sicherheit 95% für Bindemittelgehalte unter Berücksichtigung der Gesamtstreuung aus Produktion und Prüfung

Anstelle des Zufallsstrebereichs  $B_{Soll} \pm 0,3$ , der nur die prüfbedingten Zufallsabweichungen beinhaltet, vgl. (4.3), ist also unter realistischen Bedingungen der Zufallsstrebereich  $B_{Soll} \pm 0,6$  zu benutzen, der jedoch auch nur den Minimalwert für die produktionsbedingten Streuungen berücksichtigt. Die korrekte Interpretation dieses Bereiches führt zwingend zu dem Schluß, daß beobachtete Bindemittelgehalte innerhalb des Bereiches  $B_{Soll} \pm 0,6$  auf keinen Fall zu Änderungen des Angebotspreises führen dürfen.

Zusammenfassend läßt sich daher festhalten: Die Überlegungen und Formeln aus Abschnitt 3, die sich allein auf prüfbedingte Streuungen beziehen, lassen sich direkt auf die Berücksichtigung von produktionsbedingten Streuungen mit entsprechend breiteren Zufallsstrebereichen erweitern.

b) Auswirkungen prüfbedingter Zufallsabweichungen für die Raumdichte  $\zeta'$  und den Verdichtungsgrad V

In Abschnitt 3 wurde vereinfachend unterstellt, daß Verdichtungsgrad V und Raumdichte  $\zeta := \zeta'$  exakt ermittelt sind. In der Realität sind jedoch die gemessenen Werte  $V_x$  von V bzw.  $\zeta_n$  von  $\zeta$  mit prüfbedingten Zufallsabweichungen f bzw. h behaftet. Es gilt demnach:

$$(4.7) \quad V_x = V + f \quad \text{und} \quad \zeta_n = \zeta + h .$$

Wie wirken sich nun die Abweichungen f und h auf den nach der Gleitklausel (siehe Formel unter b) auf Seite 11)

$$(4.8) \quad EP_{ab}^* [DM/t] = EP_{an}^* + (B_{ist} \cdot V/100 - B_k) \cdot (1/\zeta) \cdot BP$$

bzw. nach Formel (3.3)

$$(4.9) \quad EP_{ab}^* [DM/t] = EP_{an}^* + (B \cdot V/100 - B_{soll}) \cdot (10 \text{ BP}).$$

zu bestimmenden Abrechnungseinheitspreis aus?

Der lineare Zusammenhang zwischen  $EP_{ab}^*$  und  $B_{ist}$  in der Gleitklausel (4.8) läßt sich wie folgt charakterisieren:

- Die Gerade besitzt die Steigung  $(V/100) \cdot (1/\zeta) \cdot BP$  .
- Angebots- und Abrechnungspreis stimmen speziell beim Ist-Bindemittelgehalt  $B^* := B_k \cdot 100/V$  bzw.  $B = B_{soll} \cdot 100 / V$  überein.

Auswirkungen prüfbedingter Abweichungen bei der Raumdichtebestimmung:

Wird anstelle des exakten (= wahren) Werts  $\zeta$  der gemessene Wert  $\zeta_n = \zeta + h$  in die Gleitklausel (4.8) eingesetzt, so ergeben sich folgende Effekte:

Für  $h < 0$ , d.h. für  $\zeta_n < \zeta$ , gilt  $BP/\zeta_n > BP/\zeta$ . Folglich verläuft die Gleitklauselgerade steiler als im Fall, daß  $h=0$  für die prüfbedingte Abweichung gilt, siehe Bild 4.4.

Dementsprechend verläuft für  $h > 0$  die Gleitklauselgerade flacher als im Fall  $h=0$ , siehe Bild 4.4

Eine prüfbedingte Abweichung  $h < 0$  kann also dazu führen, daß trotz exakt eingehaltenem und exakt ermitteltem Bindemittelgehalt Preisabzüge erfolgen.

Die bei der Gleitklausel im Falle von  $B < B_{soll}$  vorgesehenen, ungerechtfertigten Preisminderungen werden also bei Auftreten einer negativen prüfbedingten Abweichung h noch weiter zuungunsten des Mischgutherstellers verstärkt.

### Auswirkungen prüfbedingter Abweichungen bei der Verdichtungsgradbestimmung

Bei Einsetzen des gemessenen Wertes  $V_f = V + f$  anstelle des exakten (=wahren) Wertes  $V$  ergibt sich aus (3.3) die Formel

$$(4.10) \quad EP_{ab}^* = EP_{an}^* + (B \cdot (V+f)/100 - B_{soll}) \cdot (10 \cdot BP)$$

Um die Auswirkung der zufälligen prüfbedingten Abweichung  $f$  zu erörtern, wird hier zur Vereinfachung  $V = 100$  für den wahren Verdichtungsgradwert gesetzt. (Bemerkung: Die mathematische Erörterung für andere  $V$ -Werte verläuft dann völlig analog zu den nachfolgenden Ausführungen.)

Mit  $V=100$  resultiert aus (4.10) die Formel

$$(4.11) \quad EP_{ab}^* = EP_{an}^* + [(B - B_{soll}) \cdot (1 + f/100) + B_{soll} \cdot f/100] \cdot (10 \cdot BP)$$

Demzufolge hängt  $EP_{ab}^*$  linear von der Differenz  $(B - B_{soll})$  ab.

Für  $f=0$ , d.h. bei exakter Bestimmung des Verdichtungsgrades ist der Zusammenhang zwischen  $EP_{ab}^*$  und  $(B - B_{soll})$  gegeben durch

$$(4.12) \quad EP_{ab}^* = EP_{an}^* + (B - B_{soll}) \cdot (10 \cdot BP);$$

vgl. auch Formel (3.7) und Bild 3.1.

Der Vergleich von (4.11) mit (4.12) zeigt folgende Effekte:

Die Gerade (4.10) verläuft

- für  $f > 0$  steiler
- für  $f < 0$  flacher

als die Gerade (4.11).

An der Stelle  $B = B_{soll}$  gilt:

$$\begin{array}{lll} EP_{ab}^* > EP_{an}^* & \text{für } f > 0 \\ EP_{ab}^* = EP_{an}^* & \text{für } f = 0 \\ EP_{ab}^* < EP_{an}^* & \text{für } f < 0. \end{array}$$

Für  $f < 0$ , d.h. also für  $V_f < V$  verläuft die Gerade (4.10) ganz unterhalb der Geraden (4.11), für  $f > 0$  hingegen ganz oberhalb der Geraden (4.11), vgl. Bild 4.5.

Das Auftreten von  $f < 0$  d.h. ein gemessener Wert  $V_f = V + f < V$  hat also zur Folge, daß für jeden  $B$ -Wert der Abrechnungseinheitspreis  $EP_{ab}^*$ , abgelesen an (4.10), unter dem zugehörigen Preis liegt, der sich bei exakter Bestimmung des Verdichtungsgrades aus (4.11) ergäbe. Eine prüfbedingte Abweichung  $f < 0$  kann also dazu führen, daß trotz exakt eingehaltenem und exakt ermitteltem Bindemittelgehalt Preisabzüge erfolgen.

Bei Auftreten einer negativen prüfbedingten Abweichung  $f$ , d.h. bei  $V_f < V$ , wird also der Mischguthersteller durch die negativen prüfbedingten Abweichungen noch stärker benachteiligt, als das bereits durch die Gleitklausel selbst der Fall ist. Dies trifft insbesondere auf den Bereich  $B > B_{soll} + 0,1$  zu, weil der maximal erzielbare  $EP_{ab}^*$ -Wert noch unter  $EP_{an}^* + 0,1$  liegt; vgl. Bild 4.5.

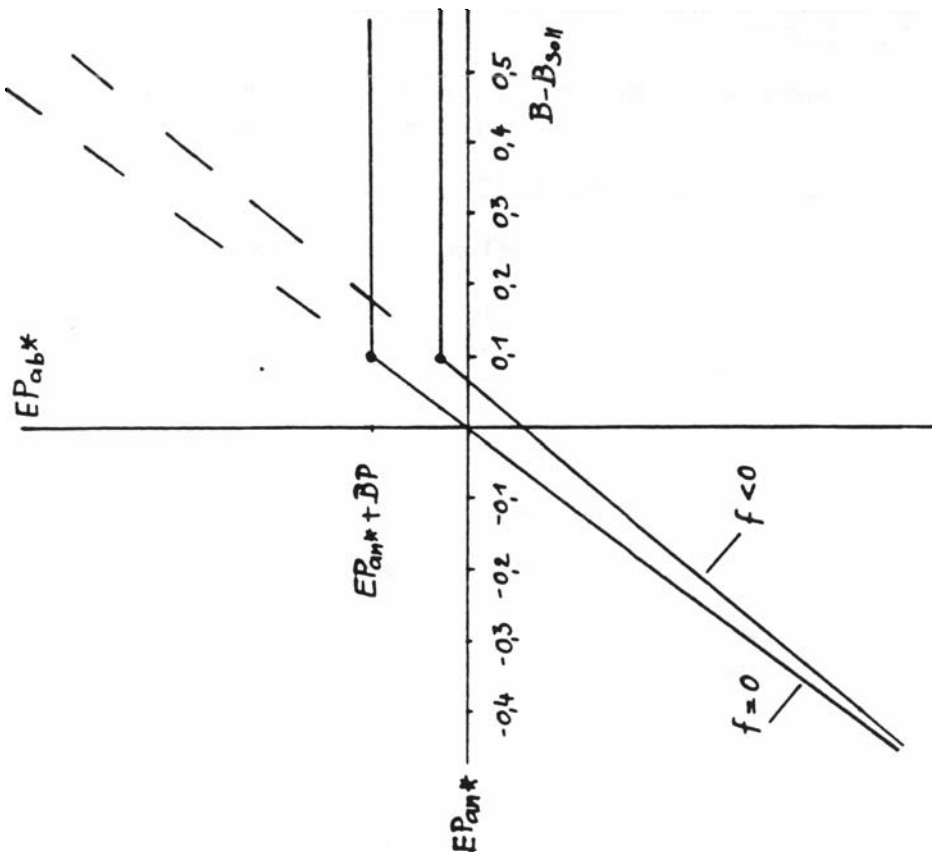


Bild 4.5:

Auswirkung einer negativen prüfbedingten Zufallsabweichung bei der Verdichtungsgradbestimmung auf den Abrechnungseinheitspreis (Prinzipskizze)

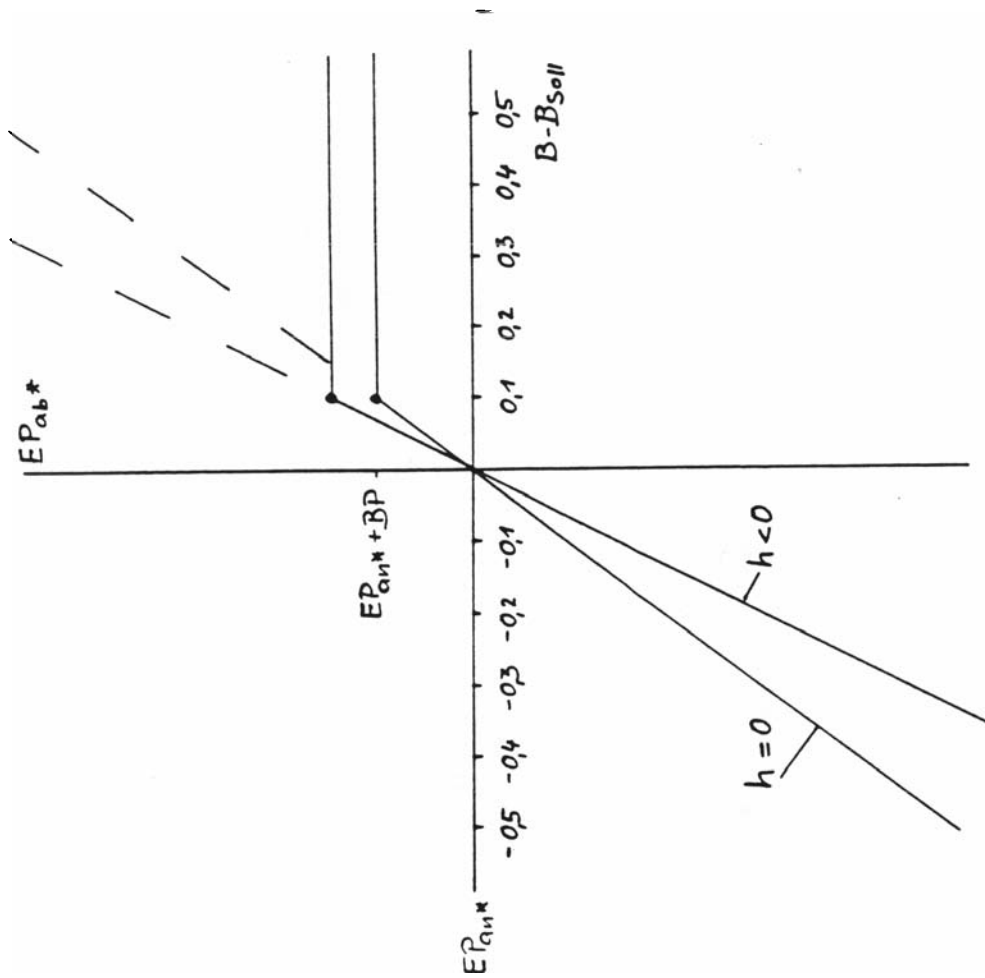


Bild 4.4:

Auswirkung einer negativen prüfbedingten Zufallsabweichung bei der Raumdicthebestimmung auf den Abrechnungseinheitspreis (Prinzipskizze)

c.) Auswirkungen von Prüflosen mit mehr als 6000 m<sup>2</sup>

Ist die Prüflosfläche größer als 6000 m<sup>2</sup> und daher mehr als eine Bindemittelgehaltsbestimmung vorzunehmen, dann bleiben die vorstehend beschriebenen Effekte und Einwände gegen die Gleitklausel prinzipiell weiterhin wirksam, nur die formelmäßige statistische Beschreibung ist auf den Fall mehrerer Bindemittelgehaltswerte und deren Mittelwert zu erweitern. Eine technisch und statistisch sinnvolle Gleitklausel muß die prüfbedingten und auch produktionsbedingten Streuungen für alle Einzelwerte und auch für die daraus gebildeten arithmetischen Mittelwerte entsprechend den Regeln der Statistik und unter Verwendung der zugehörigen Zufallsstrebereiche berücksichtigen.

## 6. Literatur

- /1/ Leistungsbeschreibung für den Straßen- und Brückenbau  
in Bayern (LB StB-By 90)  
Oberste Baubehörde im Bayerischen Staatsministerium  
des Inneren, München 1990
- /2/ ZTVT-StB 86 (Zusätzliche technische Vertragsbedingungen und  
Richtlinien für Tragschichten im Straßenbau)  
Der Bundesminister für Verkehr, Abteilung Straßenbau,  
Ausgabe 1986, Fassung 1990
- /3/ ZTV bit-StB 84 (Zusätzliche Technische Vertragsbedingungen und  
Richtlinien für den Bau von Fahrbahndecken aus Asphalt)  
Der Bundesminister Für Verkehr, Abteilung Straßenbau,  
Ausgabe 1984, Fassung 1990
- /4/ DIN 55 350 : "Begriffe der Qualitätssicherung und Statistik"  
Teil 12 : "Merkmalsbezogene Begriffe"
- /5/ DIN 1996, Teil 6 : ".Prüfung von Asphalt; Bestimmung des  
Bindemittelgehaltes und Rückgewinnung des  
Bindemittels"
- /6/ R. Urban  
"Beitrag zu einer Optimierung der Systeme zur  
Qualitätskontrolle von Asphalt unter Berücksichtigung einer  
angemessenen Risikoverteilung"  
Dissertation, TH Darmstadt, 1984
- /7/ DIN 1319: "Grundbegriffe der Meßtechnik"  
Teil 3: "Begriffe für die Meßunsicherheit und die  
Beurteilung von Meßgeräten und Meßeinrichtungen"
- /8/ DIN 55 350: "Begriffe der Qualitätssicherung und Statistik"  
Teil 13 : "Begriffe der Genauigkeit von Ermittlungs-  
ergebnissen"
- /9/ Merkblatt für die statistische Auswertung von Prüfergebnissen  
Teil 1: Grundlagen  
Forschungsgesellschaft für das Straßen- und Verkehrswesen,  
Köln, 1978
- /10/ DIN/ISO 5725: "Präzision von Prüfverfahren;  
Bestimmung von Wiederholbarkeit und Vergleich-  
barkeit durch Ringversuche"

## 7. Anhang

### Anhang 1: Analyse des Rundungsfehlers

Bezeichnet man den Rundungsfehler mit  $f$ , dann gilt für die gerundeten Bindemittelgehalte  $B_x$  unter Berücksichtigung von  $B = B_w + e$  die Modellgleichung

$$(A1.1) \quad B_x = B + f = B_w + e + f .$$

Unterstellt man für  $f$  eine Gleichverteilung über dem Intervall

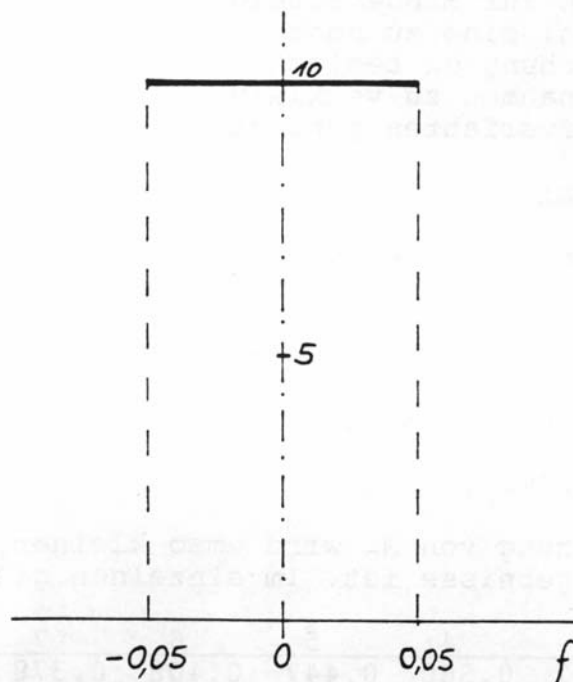
$$-0,05 \leq f \leq +0,05 ,$$

siehe Bild A1, dann besitzt  $f$  den Erwartungswert

$$(A1.2) \quad \mu_x = E(f) = 0$$

und die Standardabweichung

$$(A1.3) \quad \sigma_x = 0,1/\sqrt{12} = 0,029 .$$



**Bild A1:**

Gleichverteilung des Rundungsfehlers  $f$  über dem Intervall  $-0,05 \leq f \leq +0,05$  mit  $\mu_x=0$  und  $\sigma_x=0,029$

Rundungsfehler  $f$  und prüfbedingte Abweichung  $e$  beeinflussen sich gegenseitig nicht; deshalb gilt für die Standardabweichung  $\sigma_B$  von  $B$  :

$$(A1.4) \quad \sigma_B = \sqrt{(\sigma_e^2 + \sigma_f^2)} .$$

Hieraus ergibt sich mit  $\sigma_B = \sigma_e = \sigma_R = 0,15$  und  $\sigma_f = 0,0289$  für  $\sigma$  der Wert

$$(A1.5) \quad \sigma_B = 0,153$$

Der Unterschied zwischen  $\sigma_B = 0,15$  und  $\sigma_B = 0,153$  ist für praktische Zwecke völlig unerheblich. Die Auswirkungen des Rundungsfehlers auf  $\sigma_B$  sind also vernachlässigbar.

## Anhang 2: Möglichkeiten zur Reduktion der Breite des Zufallsstrebereichs.

### Technische Möglichkeit:

Falls der nach Formel (4.1) gebildete Zufallsstrebereich (4.3) zur vorgegebenen Statistischen Sicherheit  $1-\alpha=95\%$  mit dem zugehörigen Faktor  $z=1,96 \approx 2,0$  zu breit erscheint, dann liegt das daran, daß das Verfahren zur Bindemittelgehaltsbestimmung nach DIN 1996 zu ungenau ist, d.h. eine zu hohe Vergleichsstandardabweichung  $\sigma_R$  besitzt. Wäre es möglich  $\sigma_R$  durch einfache technische Maßnahmen zu verkleinern, dann hätte man diese schon lange für das Prüfverfahren genutzt.

### Statistische Möglichkeit:

Man kann die Prüfstreuung auf statistischem Wege dadurch reduzieren, daß man anstelle einer einzigen Messung mehrere Messungen (am gleichen Mischgut) durchführt und aus den  $n \geq 2$  Prüfergebnissen  $x_1, \dots, x_n$  das arithmetische Mittel  $M_n := M_n(x) = \sum x_i / n$  bildet.

Für die Standardabweichung von  $M_n$  gilt

$$(A2.1) \quad \sigma_R(M_n) = \sigma_R / \sqrt{n} ,$$

d.h. die Standardabweichung von  $M_n$  wird umso kleiner, je größer die Anzahl  $n$  der Prüfergebnisse ist. Im einzelnen gilt hierfür:

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$1/\sqrt{n}$	1,0	0,707	0,577	0,500	0,447	0,408	0,378	0,354	0,333

Allerdings läßt sich - wie aus (A2.1) hervorgeht - eine Halbierung von  $\sigma_R(M_n)$ , also eine Verdopplung der Genauigkeit, nur durch eine Vervierfachung des Prüfaufwandes erreichen. Wenn man also die Gesamt-Breite 0,6 des Bereiches (4.3) auf 0,3 halbieren wollte, müßte man an vier Proben statt an einer den Bindemittelgehalt bestimmen.



Das Verfahren nach DIN 1996 ist aber, weil es so kompliziert, zeitraubend und aufwendig ist, relativ teuer. Eine Vervierfachung der Prüfkosten wird daher wohl kaum Akzeptanz finden. Gibt man sich nur mit einer Verdopplung des Prüfaufwandes von  $n=1$  auf  $n=2$  für eine zugeordnete Fläche von 6000 m<sup>2</sup> zufrieden, so bewirkt das leider nur eine etwa 30%-ige Reduktion der Bereichsbreite.

Wenn die Erhöhung des Prüfaufwandes aus Kostengründen scheitert, dann gibt es als letzten Ausweg noch die kombinierte Möglichkeit.

Kombination aus technischer und statistischer Möglichkeit:

Dazu ist erforderlich, daß man bereit ist, anstelle der teuren Bindemittelgehaltsbestimmung nach DIN 1996 ein prüfkostengünstigeres "Schnellverfahren" offiziell zuzulassen und zu benutzen, wie zum Beispiel die Bestimmung mit der Isotopensonde. Die Vergleichsstandardabweichung  $\sigma_{R,S}$  des Schnellverfahrens darf dabei durchaus größer sein als die entsprechende Standardabweichung  $\sigma_{R,DIN}$  des DIN-Verfahrens, falls nur das Schnellverfahren mit geringeren Prüfkosten verbunden ist. Dann lassen sich ggf. bei gleichen Kosten wie für eine einzige DIN-Bestimmung insgesamt  $n_s > 1$  Messungen mit dem Schnellverfahren durchführen. Das Schnellverfahren ist natürlich dann dem DIN-Verfahren vorzuziehen, wenn

$$(A2.2) \quad \sigma_{R,S} / \sqrt{n_s} < \sigma_{R,DIN}$$

gilt, und man dadurch bei gleichen Prüfkosten wie beim DIN-Verfahren einen engeren Zufallsstrebereich erhält.



Herstellung und Vertrieb:  
**FGSV Verlag GmbH**  
50999 Köln · Wesselinger Straße 17  
Fon: 02236 / 38 46 30 · Fax: 38 46 40